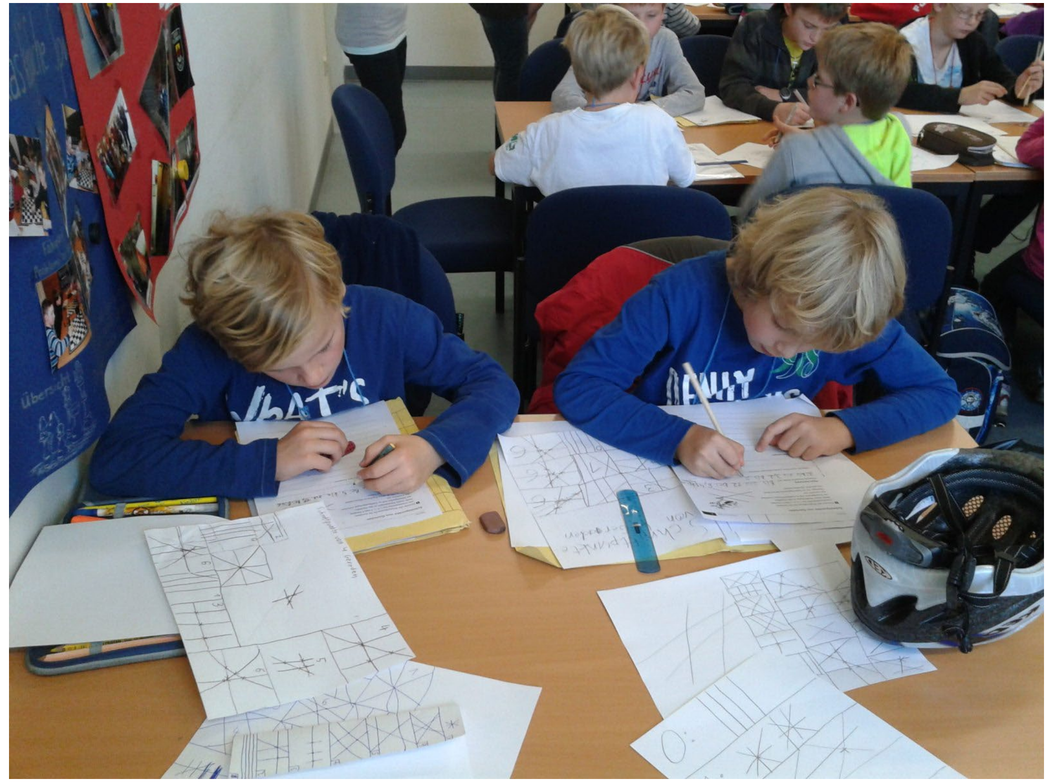
„Tag der Mathematik“ an der PH Graz am 8.02.2024



Wie verschieden sind mathematisch begabte Schüler/-innen und wie kann dieser Heterogenität im Unterrichtsalltag entsprochen werden?

Gliederung

1. Binnendifferenzierung –
   die Lösung des Differenzierungs-
   problems im Mathematikunterricht?

2. Die Vielfalt mathematischer
   Begabungsausprägungen

3. Binnendifferenzierung versus
   natürliche Differenzierung

4. Forscherstunden – ein innovatives
   Unterrichtsformat für alle Schüler/
   -innen im Regelunterricht

1. Funktionen der deutschen Bildungsstandards

Fazit aus den Ergebnissen internationalen Studien:

„In Deutschland fehlte bis in die 1990er Jahre die systematische Überprüfung von Erträgen schulischer Bildungsprozesse, wie dies in vielen Ländern üblich war und ist.“
(Walther, van den Heuvel-Panhuizen, Granzer, Köller 2009, S.10)

Funktionen der Bildungsstandards

- **Entwicklungsfunktion** (Die in der Schulpraxis bislang weit verbreitete Fokussierung auf den Erwerb mathemat. Grundkenntnisse und Routinefähigkeiten muss reduziert werden – zu Gunsten einer *verstärkten Zuwendung zu einem Sinn verstehenden Lernen* und *zu einer* hiermit im Zusammenhang stehenden *Förderung von Kompetenzen im Problemlösen, im Argumentieren oder im Modellieren*.)

- **Überprüfungsfunktion** (Die diesbezüglichen Lernentwicklungsstände aller Kinder sind regelmäßig zu erfassen und zu analysieren.)

1. Anforderungsbereiche der Bildungsstandards

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

- Das Lösen der Aufgabe erfordert Grundwissen und das Ausführen von Routinetätigkeiten.
- Der Lösungsweg ist in der Regel einschrittig.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

- Das Lösen der Aufgabe erfordert das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen.
- Der Lösungsweg umfasst in der Regel mehrere Schritte.

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

- Das Lösen der Aufgabe erfordert komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern.

1. Anforderungsbereiche der Bildungsstandards

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

(Differenzierungsangebot für mathematisch begabte SuS)

Beispiel:

Finde alle Zahlen zwischen 100 und 200, die 13-mal so groß wie ihre Quersumme sind. Begründe deine Lösung.

1. Anforderungsbereiche der Bildungsstandards: Umsetzung in einem Schulbuch

Mathematische Begriffe

3 a) Ordne zu!

450 + 20 = 470
450 − 20 = 430

Summe | Differenz | Subtrahend | Summand | Minuend

b) Berechne die Differenz der Zahlen 585 und 346.

Was geschieht, wenn Minuend und Subtrahend jeweils um 10 größer werden?

c) Richtig oder falsch? Begründe!

Die Summe zweier Summanden ist stets größer als jeder einzelne Summand.

Aus: Rechenwege, Klasse 3, S. 84 („Das kann ich schon!-Seite“)

Zahlen darstellen

2 a) Lies jede Zahl und stelle sie auf dem Zahlenschieber dar!

798 046	40 852
666 333	987 654

b) Trage die Zahlen von Aufgabe a) in eine Stellenwerttafel ein! Zerlege sie dann!
z.B.:
798 046 = 7HT + …

c) Welche Zahlen kannst du mit 2 Punkten in einer Stellenwerttafel darstellen?

HT	ZT	T	H	Z	E

Aus: Rechenwege, Klasse 4, S. 38 („Das kann ich schon!-Seite“)

Binnendifferenzierung als Lösung des Differenzierungsproblems?

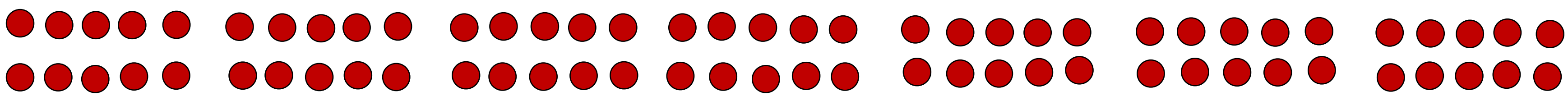
Binnendifferenzierung - häufig genutzt im regulären Mathematikunter-richt, aufgezeigt am Thema „Teilbarkeit natürlicher Zahlen“ (Kl. 6)

Planung einer Übung:

- Die Lehrkraft teilt die Lerngruppe in drei verschiedene Leistungsgruppen ein:
  - Kinder mit Lernschwierigkeiten,
  - durchschnittlich leistungsstarke Kinder,
  - sehr leistungsstarke bzw. besonders begabte Kinder.
- Jede Gruppe erhält gemäß ihrem von der Lehrkraft eingeschätzten Leistungsniveau Aufgaben zum selbst-ständigen individuellen Üben.
- Hauptdifferenzierungsdimension: Vertikale Differenzierung

Binnendifferenzierung – häufig genutzt im regulären MU, aufgezeigt am Lernthema „Teilbarkeit natürlicher Zahlen“

Übungsaufgaben für Kinder mit Lernschwierigkeiten:

1. 

Durch welche Zahlen sind
a) 8, b) 17, c) 24, d) 33 teilbar?

____

Du kannst Legeplättchen nutzen.

2. a) Prüfe, ob 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 ein Teiler von 36 sind.

____

b) Welche anderen Zahlen sind Teiler von 36?

____

Binnendifferenzierung – häufig genutzt im regulären MU, aufgezeigt am Lernthema „Teilbarkeit natürlicher Zahlen“

Übungsaufgaben für durchschnittlich leistungsstarke Kinder:

1. Prüfe, ob b ein Vielfaches von a ist. Tipp: Du kannst auch schriftlich dividieren.

a	2	5	6	7	8	9	11	12
b	11	20	72	147	110	117	222	132

---

2. Teilbar oder nicht?
   Setze jeweils das Zeichen | oder $\nmid$ zwischen den beiden Zahlen.

   a) 4 36 b) 6 74 c) 7 112 d) 11 352 e) 13 263 f) 24 576

---

3. Ermittle von jeder Zahl alle Teiler und gib die Anzahl der Teiler an.

   a) 5 b) 12 c) 32 d) 39 e) 55 f) 100

Binnendifferenzierung – häufig genutzt im regulären MU, aufgezeigt am Lernthema „Teilbarkeit natürlicher Zahlen“

Übungsaufgaben für sehr leistungsstarke / begabte Kinder:

1. Teilbar oder nicht?
   Setze jeweils das Zeichen | oder ∤ zwischen den beiden Zahlen und begründe deine Entscheidungen.
   a) 15 95 b) 16 96 c) 17 319 d) 19 952 e) 21 863 f) 0 100 g) 37 777

   ___

2. Ermittle von jeder Zahl alle Teiler und gib die Anzahl der Teiler an.
   a) 54 b) 120 c) 332 d) 439 e) 666 f) 789 g) 1 240

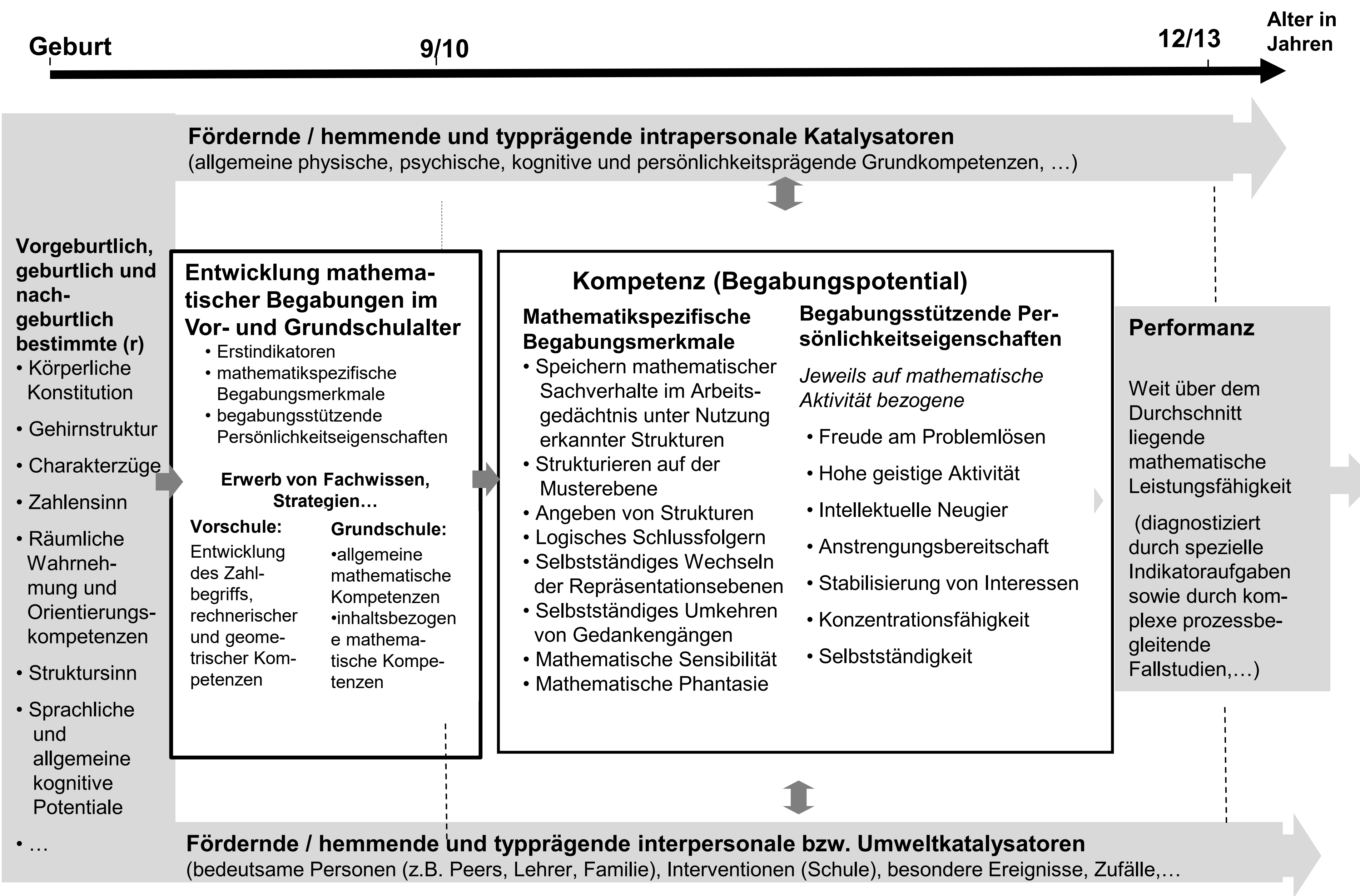
   ___

   ___

3.* Welche natürliche Zahl bis 100 hat die meisten Teiler?

   ___

Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen im 5. u. 6. Schuljahr (Sjuts 2017)



2. Die Vielfalt mathematischer Begabungsausprägungen
2.1 Verschiedene Problemlösestile

Problemlösestile mathematisch begabter Sechst- und Siebtklässler/-innen (nach Schreiber, 2022)

- Intuitives Erahnen einer Problemlösung bzw. intuitives Herantasten an eine Lösung

- Systemhaftes Vorgehen

  A: … arbeitet bevorzugt auf der formal-symbolischen Ebene

  B: … hat keine bevorzugte Handlungsebene

- Suchen nach Lösungsmustern durch abwechselndes Probieren und Überlegen

- „Mischtyp“

Problemaufgabe: Finde alle Zahlen zwischen 100 und 200, die 13-mal so groß wie ihre Quersumme sind. Begründe deine Lösung.

Es kommen v.a. *2 Lösungswege* infrage:

A. Nutzen von Zahlbeziehungen, effektives Probieren

- Quersummen 3-stelliger Zahlen zwischen 100 und 200 können nur 1, 2, 3, … 19 sein.
- Multipliziert man die Zahlen von 1 bis 27 mit 13, dann erhält man nur in 3 Fällen Produkte, deren Quersumme jeweils mit dem 1. Faktor übereinstimmt: 9 • 13 = **117**, 12 • 13 = **156**, 15 • 13 = **195**.

B. Übersetzen der Zahlbeziehungen in eine Gleichungsstruktur

Allgemeine Bezeichnung einer 3-stelligen Zahl: abc ($a = 1$ und $9 \geq a, b$).

Es muss gelten: $100a + 10b + 1c = 13\,(a+b+c)$.

$\rightarrow \quad 100a + 10b + 1c = 13a + 13b + 13c$

$\rightarrow \quad 87a = 3b + 12c$ bzw. $29a = b + 4c$

$\rightarrow \quad 29 = b + 4c$

2. Die Vielfalt mathematischer Begabungsausprägungen
2.2 Geschlechtsspezifische Besonderheiten

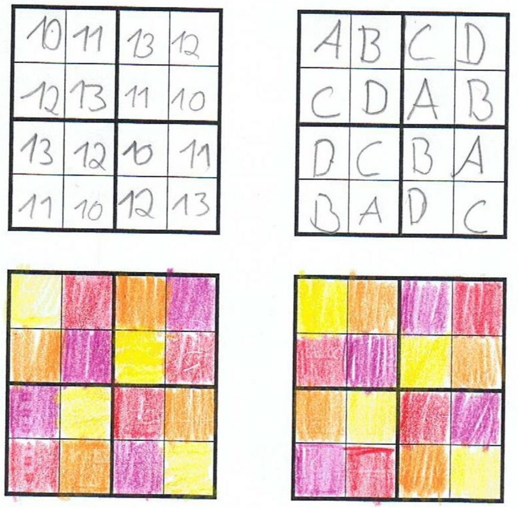
Mathematisch begabte Mädchen haben tendenziell

- ein breiteres Interessenspektrum als begabte Jungen,
- andere (weniger „weibliche") Interessen als normal begabte Mädchen,
- eine bessere Kausalattributation in Bezug auf Mathematik als normal begabte Mädchen,
- kein Geschlechtsrollenbild, dem sie folgen und wodurch sie ein größeres Interesse an Mathematik zeigen als normal begabte Mädchen,
- ein weniger stark ausgeprägtes geschlechtsspezifisches Verhalten,
- in Bezug auf Mathematik ein positives Selbstkonzept.

2. Die Vielfalt mathematischer Begabungsausprägungen
2.2 Geschlechtsspezifische Besonderheiten

Mathematisch begabte Mädchen

- nähern sich einem neuen anspruchsvollen Problem vorsichtiger, behutsamer, oft auch umsichtiger als Jungen an,
- sind in der Phase der Problemlösung vergleichsweise kommunikativer, sie tauschen sich aus, gehen wiederum behutsamer und oft umsichtiger als Jungen vor.
- legen viel größeren Wert als Jungen auf eine übersichtliche, saubere und vollständige Lösungsdarstellung,
- neigen stärker als Jungen dazu, ihre Lösungen verbal bzw. in Textform oder grafisch darzustellen.



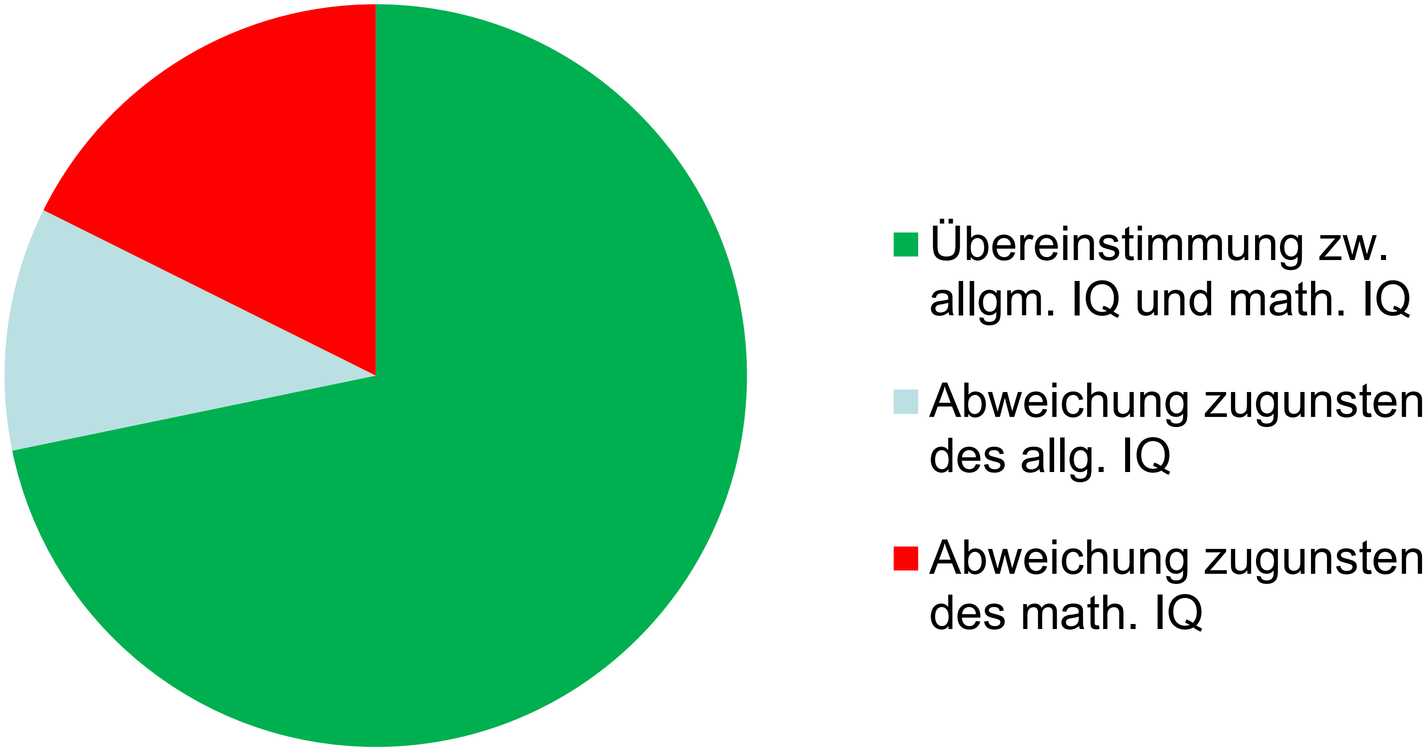
Lösung eines Mädchens zum 2x2-Sudoku-Problem

2. Die Vielfalt mathematischer Begabungsausprägungen
2.3 Unterschiedliche kognitive Ausprägungen

Auf der Basis vieler Fallbeispiele zu mathematisch begabten Schülern/-innen kann man differenzieren zwischen Kindern und Jugendlichen

- mit etwa gleich hohen mathematischen und allgemeinkognitiven, einschließlich sprachlichen, Kompetenzen (Auf der Basis eigener langjähriger Untersuchungen trifft dies auf etwa zwei Drittel aller mathematisch begabter SuS im Projekt „Mathe für kleine Asse“ zu.),
- mit einem hohen mathematischen Leistungspotenzial, insbesondere im Finden origineller Problemlösungen, und vergleichsweise deutlich geringeren sprachlichen Kompetenzen,
- mit z.T. ungewöhnlichen mathematischen Potenzialen auf speziellen Gebieten, wie z. B. im Umgang mit formal-abstrakten Strukturen, im Kopfrechnen oder im räumlichen Vorstellungsvermögen, und zugleich gravierenden Defiziten in anderen grundlegenden kognitiven Bereichen sowie meist im Sozialverhalten (z.B. autistische SuS oder „Savants“).

Zur Häufigkeit von kleinen „Mathe-Assen“ mit gravierenden Sprachdefiziten

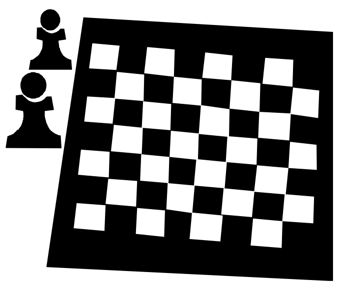


Knapp 20 % der mathematisch begabten Kinder im Mathe-Asse-Projekt haben deutlich geringere sprachliche Kompetenzen!

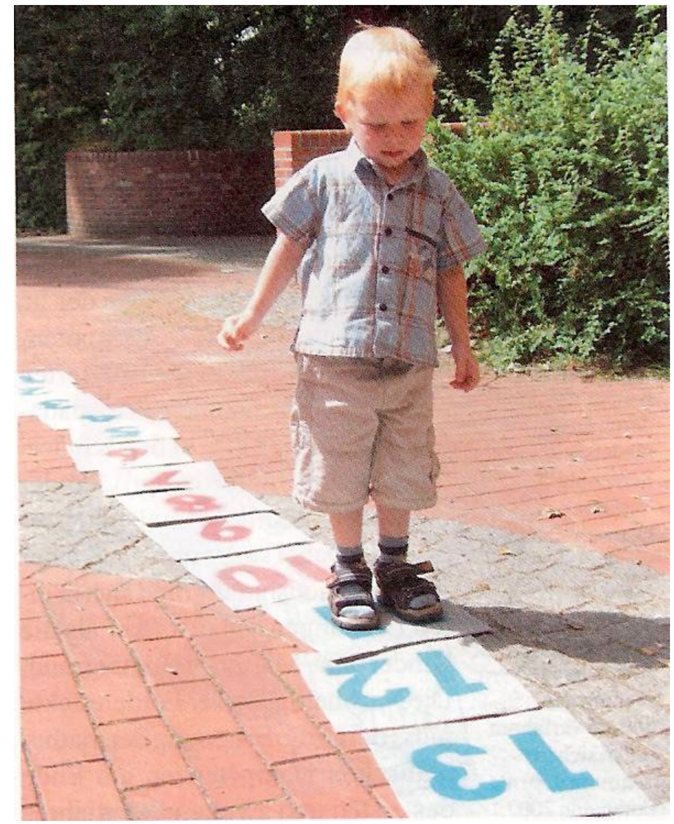
Sven – ein mathematisch begabtes Kind mit Lese-Rechtschreibschwierigkeiten

Indizien für Svens mathematische Begabung im Vorschulalter

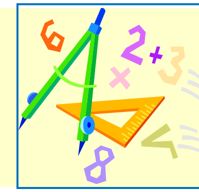
- mit 3 Jahren:
  Zählen und Zahlen lesen bis 100



- mit 4 Jahren:
  Schach spielen, dabei schon Einprägen und bewusstes Nutzen verschiedener möglicher Züge (*intensive sprachfreie Gedächtnisschulung*)



Sven – ein mathematisch begabtes Kind mit Lese-Rechtschreibschwierigkeiten



Besonderheiten von Svens Sozialverhalten im Vorschulalter

- hat als Dreijähriger nur mit Sechsjährigen gespielt,
- wollte bei Strategiespielen stets mit der Erwachsenenversion spielen,
- zeigte einen ausgeprägten Sinn für Gerechtigkeit und für konsequentes Einhalten von Regeln und Abmachungen.

Sven – ein mathematisch begabtes Kind mit Lese-Rechtschreibschwierigkeiten

Beobachtungsergebnisse beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben

Sven

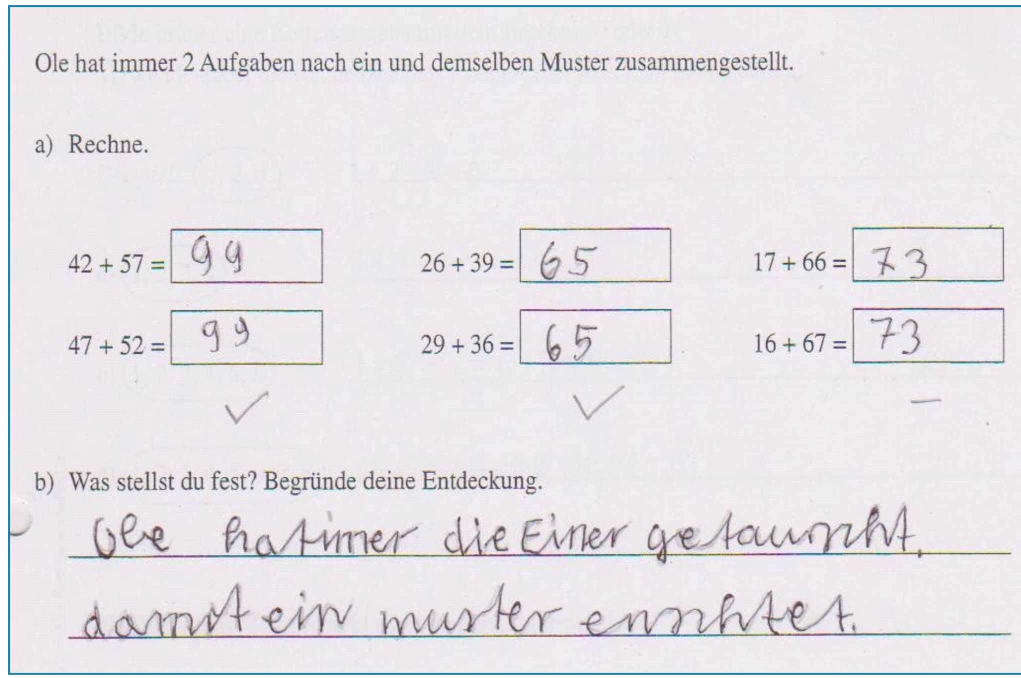
- ist meist hoch motiviert,
- kann Probleme äußerst schnell erfassen,
- entwickelt meist sehr zügig richtige Lösungsideen,
- wechselt immer schnell auf eine bildlich-schematische oder formal-abstrakte Handlungsebene,
- kann auf hohem Niveau mathematische Sachverhalte selbstständig strukturieren,
- hat ein ausgeprägtes Gefühl für Zahlen und Zahlbeziehungen und ein besonderes ästhetisches Gefühl für „schöne“ mathematische Strukturen.

Sven – ein mathematisch begabtes Kind mit Lese-Rechtschreibschwierigkeiten

Besonderheiten, die aus Svens Lese-Rechtschreibproblemen resultieren *(Umgang mit seinen Schwächen)*

Sven

- bevorzugt Einzelarbeit,
- liest Aufgabentexte verkürzt, vorstrukturiert
- stellt Lösungswege und Lösungen stark verkürzt, unvollständig und fehlerhaft dar,
- vermeidet es viel aufzuschreiben oder hat Zeitprobleme,
- vermeidet es, seine Ergebnisse anderen zu zeigen oder im Plenum vorzustellen.


Ole hat immer 2 Aufgaben nach ein und demselben Muster zusammengestellt.

a) Rechne.

42 + 57 = 99	26 + 39 = 65	17 + 66 = 73
47 + 52 = 99	29 + 36 = 65	16 + 67 = 73

b) Was stellst du fest? Begründe deine Entdeckung.

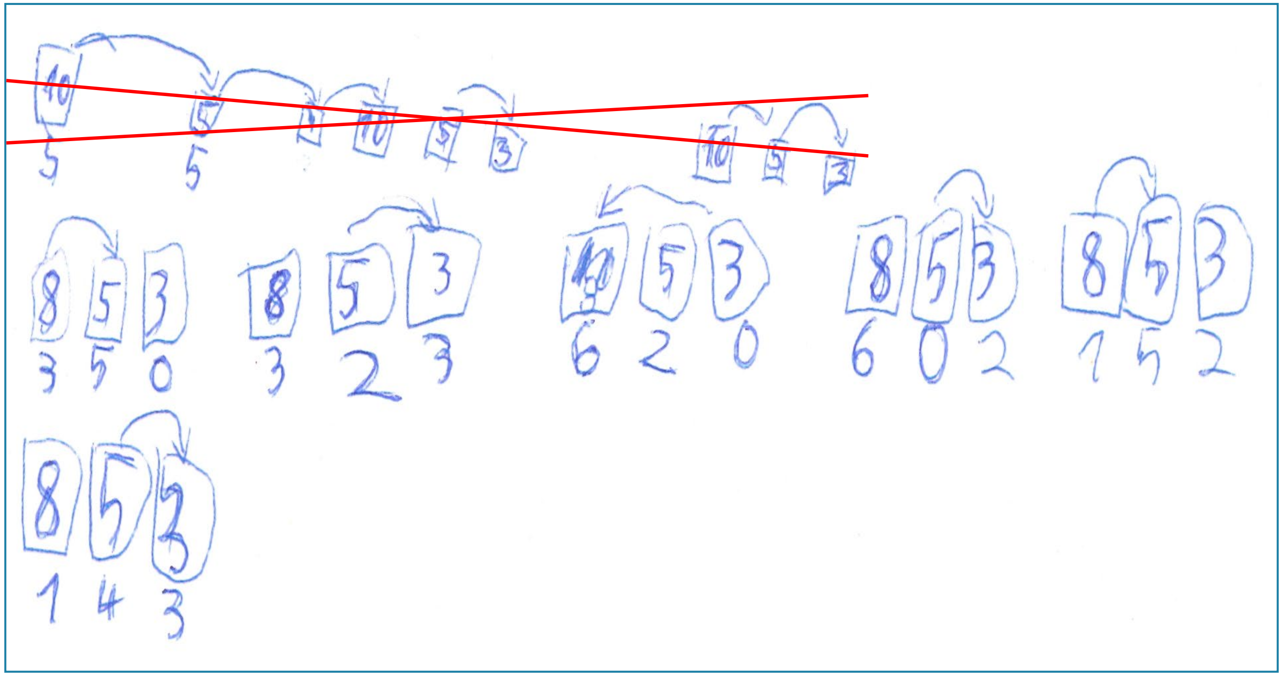
Ole hatimmer die Einer getauscht. damit ein murter enshtet.

Beispiel für eine Lösung mit Rechtschreibfehlern

Sven – ein mathematisch begabtes Kind mit Lese-Rechtschreibschwierigkeiten

2. Beispiel für eine typische Lösungsdarstellung von Sven

Problemaufgabe:
Tim hat einen Eimer mit 8 l Wasser, außerdem einen 3-Liter- und einen 5-Liter-Eimer. Wie kann er nur durch Umfüllen 4l Wasser abmessen?

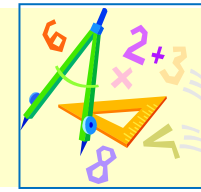


Sven – ein mathematisch begabtes Kind mit Lese-Rechtschreibschwierigkeiten

Besonderheiten, die aus Svens Lese-Rechtschreib-problemen resultieren *(„Stärken seiner Stärken“)*

- besondere Kompetenzen im Speichern mathematischer Sachverhalte im Arbeitsgedächtnis unter Nutzung erkannter Strukturen
- äußerst schnelles (z.T. nicht an Sprache gebundenes) Erfassen und „Verarbeiten“ mathematischer Informationen
- hohe Kompetenz im schnellen und geschickten Abstrahieren und Formalisieren
- sehr ausgeprägtes Zahlgefühl,
  Spaß am substanziellen Kopfrechnen
- sehr ausgeprägtes räumliches Vorstellungsvermögen

Sven – ein mathematisch begabtes Kind mit Lese-Rechtschreibschwierigkeiten



Svens Prägung durch den Grundschulunterricht

- Probleme nach einem Lehrerwechsel im 2. Schuljahr
- Unterschätzung von Svens kognitiven Kompetenzen durch seine neue Lehrerin
- Svens Bedürfnis nach einer wichtigen Bezugsperson
- hohe Sensibilität bei Lärm im Unterricht
- Entwicklung von Vermeidungs-, Ausweich- und Verweigerungsstrategien
- Suche nach Chancen, seine Interessen zu befriedigen und seine besonderen Potenziale auszutesten

Svens Eltern: Sein großer Rückhalt

Authentisches Beispiel eines besonderen Mathe-Asses

Joshua – ein Drittklässler, der sehr kreative Ideen beim Problemlösen entwickelte, diese aber kaum verbalisieren konnte

Entdeckung von Joschua in 2x2-Sudoku-Quadraten:

Im kleinen sodoku quadrat kann zum beispil die 1der 2 und 3 diagonal ligen wen die 1 auch der 4 diagona 1 liegt klapt das ganze sodokuokuadrat nicht

1	3	2	4
4	2	3	1
3	4	1	2
2	1	4	3

Joshuas Rückmeldung am Schuljahresende:
„Ich finde gut, dass euch meine Rechtschreibung egal ist und ich einfach frei knobeln konnte."

2. Die Vielfalt mathematischer Begabungsausprägungen
2.4 Unterschiedliche Sozialkompetenzen kleiner Mathe-Asse

Man kann unterscheiden zwischen kleinen Mathe-Assen mit

- **„mäßiger“ mathematischer Begabung,**
- **deutlicher mathematischer Hochbegabung,**
- **extremer mathematischer Hochbegabung.**

Faustregel:

Je höher bzw. je extremer die Begabung ist, desto einsamer sind betroffene Kinder und desto häufiger leiden sie unter Sozialproblemen.

3. Alternative zur Binnendifferenzierung: Natürliche Differenzierung

- Die gesamte Lerngruppe erhält das **gleiche Aufgabenangebot**, das aber vielfältige Möglichkeiten zum „Mathematiktreiben“ und damit Aufgaben sehr unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade enthält.

- Jedes Kind kann die Aufgaben gemäß seinen Voraussetzungen bearbeiten und hat dabei Chancen erfolgreich zu sein.

- Charakter der Aufgabe: **offene substanzielle Problemaufgabe** mit Möglichkeiten zum Finden und Lösen von Anschlussproblemen

- Die Differenzierung erfolgt ***vom Kind*** (und nicht von der Lehrkraft) aus. Jedes Kind kann selbst bestimmen, wie tief es in ein Aufgabenfeld eindringt, welche Lernmittel es nutzt, welche Lösungswege es anwendet und wie es seine Lösung darstellt. Die Differenzierung wird also vor allem durch das vorgegebene Aufgabenfeld ausgelöst.

Umsetzung der „natürlichen Differenzierung“ beim Üben des Lernthemas „Teilbarkeit“

Matt Parker
australischer Mathematiker, geb. 1980

„Wenn ich zum Zahnarzt muss, lenke ich mich mental gern ein wenig ab, während ein Fremder versucht, in meinem Mund zu kriechen. Normalerweise mit irgendeinem Zahlenspiel, dass ich im Kopf spielen kann. Als ich eines Tages wieder einmal auf dem Weg zum Zahnarzt war, fragte ich daher auf Twitter nach einem guten Matherätsel, das sich ohne Papier und Bleistift lösen ließ …“

(aus: Parker, M. (2015): Auch Zahlen haben Gefühle. Reinbek: Rohwohlt Verlag. S. 17.)

Umsetzung der „natürlichen Differenzierung“ beim Üben des Lernthemas „Teilbarkeit“ (Kl. 5 / 6)

Parkers „Zahnarzt-Aufgabe“:

Forscheraufgabe:

Ordne die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 so an, dass

- die ersten 2 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 2 sind,
- die ersten 3 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 3 sind,
- die ersten 4 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 4 sind,
- die ersten 5 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 5 sind,
- die ersten 6 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 6 sind,
- die ersten 7 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 7 sind,
- die ersten 8 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 8 sind,
- alle 9 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 9 sind.

?

Hinweis: Es gibt eine vollständig richtige Lösung!

Umsetzung der „natürlichen Differenzierung“ beim Üben des Lernthemas „Teilbarkeit“

Anpassung der „Zahnarzt-Aufgabe“ an den Mathematikunterricht des 5. und 6. Schuljahres:

Forscheraufgabe:

Ordne die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 so an, dass

- die ersten 2 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 2,
- die ersten 3 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 3,
- die ersten 4 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 4,
- die ersten 5 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 5,
- alle 6 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 6 sind.

Hinweise:

- *Jede Ziffer darf nur genau einmal verwendet werden!*
- *Es kann auch mehrere richtige Lösungen einer Teilaufgabe geben.*

Umsetzung der „natürlichen Differenzierung“ beim Üben des Lernthemas „Teilbarkeit“

Lösungshinweise der „Zahnarzt-Aufgabe“:

Forscheraufgabe: Ordne die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 so an, dass

- die ersten 2 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 2,

L.: z.B. **12**3 456 oder **14**3 246 oder **26**1 345 oder **64**2 135, …

- die ersten 3 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 3,

L.: z.B. **123** 456 oder **132** 246 oder **234** 156 oder **156** 234, …

- die ersten 4 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 4,

L.: z.B. **126 4**53 oder **326 4**15 oder **236 4**51 oder **562 4**13, …

- die ersten 5 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 5,

L.: z.B. **126 45**3 oder **326 45**1 oder **236 45**1 oder **362 45**1, …

- alle 6 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 6 sind.

L.: **123 654, 321 654** sind die Lösungszahlen, die alle Bedingungen erfüllen.

Didaktisch-methodische Empfehlungen für den Einsatz der „Zahnarzt-Aufgabe“ im Mathematikunterricht des 5. oder 6. Schuljahres:

- Vor dem Einsatz der Forscheraufgabe ein Grundverständnis aller SuS für die Begriffe „teilbar durch …“, „Vielfaches von …“ sowie von einfachen Teilbarkeitsregeln sichern (z.B. durch einen spielerischen Einstieg).
- Als Materialangebot Ziffernkarten für SuS zur Verfügung stellen.
- Den SuS freie Wahl bzgl. der Lernmittel, der Lösungswege, der Lösungs-darstellungen, der sozialen Lernform, … lassen.
- Auf die Lernpotentiale aller SuS vertrauen und der Eigendynamik von Lernprozessen Freiräume geben.
- Problemlösestile einzelner Kinder beim Forschen auf der Basis eines Beobachtungsrasters erfassen.
- Ausreichend Zeit für das Vorstellen und Diskutieren von Lösungswegen und Lösungen einplanen.

Beobachtungsbogen zum Problemlösestil

Vorname: ______________________ Name: ______________________ Datum: _________

Thema der Stunde / der Forscheraufgabe: ______________________________________

1. Lernverhalten: ____

____

____

2. Bevorzugte soziale Lernform:

O Einzelarbeit O Partnerarbeit O Kleingruppenarbeit

3. Problemlösestil:

O Intuitives Erahnen intuitives Herantasten an eine Lösung

O Systemhaftes Vorgehen - bevorzugt auf der formal-symbolischen Ebene

O Systemhaftes Vorgehen - keine bevorzugte Handlungsebene

O Suchen nach Lösungsmustern durch abwechselndes Probieren und Überlegen

O „Mischtyp“

4. Weitere Auffälligkeiten: ____

Umsetzung der „natürlichen Differenzierung“ beim Üben des Lernthemas „Teilbarkeit“ (Kl. 8 / 9)

Lösung von Parkers „Zahnarzt-Aufgabe“:

Forscheraufgabe:

Ordne die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 so an, dass

- die ersten 2 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 2 sind,
- die ersten 3 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 3 sind,
- die ersten 4 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 4 sind,
- die ersten 5 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 5 sind,
- die ersten 6 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 6 sind,
- die ersten 7 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 7 sind,
- die ersten 8 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 8 sind,
- alle 9 Ziffern als Zahl ein Vielfaches von 9 sind.

Hinweis: Es gibt eine vollständig richtige Lösung!

Begründe deine Lösung.

Die richtige Lösungszahl ist 381 654 729.

Vergleichende Analyse: Merkmale der in der Schulpraxis häufig genutzten Differenzierungsform

- Bezeichnung: **Binnendifferenzierung** bzw. „**innere Differenzierung**“
- **Hauptmerkmale**:
  - Die Lehrkraft richtet für eine bestimmte Zeit relativ homogene Lerngruppen ein.
  - Die Lerngruppen erhalten unterschiedlich schwere Aufgaben – gemäß ihren jeweiligen Leistungspotenzialen.
  - Die leistungsstarken bzw. mathematisch begabten Kinder lösen z.B. sehr anspruchsvolle bzw. komplexe Problemaufgaben, während demgegenüber Kinder mit Lernproblemen Aufgaben auf niedrigerem Abstraktionsniveau, mit geringerer Komplexität, ... lösen.
  - Eine häufige Variante bzw. Ergänzungsform besteht darin, dass sehr leistungsstarke Kinder zusätzlich Sternchen-Aufgaben erhalten.

Vergleichende Analyse: Merkmale der in der Schulpraxis häufig genutzten Differenzierungsform

Beispiele für Sternchen-Aufgaben aus Schulbüchern, die im Sinne der Binnendifferenzierung für leistungsstarke Kinder gedacht sind:

7 Vergleiche!

a) 700 Tage und 2 Jahre
1 000 Tage und 3 Jahre

b) 72 Monate und 6 Jahre
50 Monate und 4 Jahre

c) ein Vierteljahr
und 3 Monate

d)* 731 Tage und 2 Jahre

2. Findest du auch diese Zahlen?

a. Ich denke mir eine zweistellige Zahl, vertausche Einer- und Zehnerziffer und dividiere durch 2.
Ich erhalte die Zahl 16.

Probleme beim Einsatz von Sternchen-Aufgaben

Statement von Julia, einer hochbegabten Zweitklässlerin:

„Wir machen fast immer das Gleiche. Alle auf einmal. Meistens bin ich die erste, die fertig ist, manchmal ist Lukas aber schneller, bei Mathe meistens. Und dann sitzen wir da, und wenn Frau S. es bemerkt, bekommen wir Zusatz-aufgaben. Das sind noch mal die gleichen Sachen, eben noch vier Beispiele mehr. Inzwischen haben wir ausgemacht, dass wir so tun, als sind wir noch nicht so weit. Dann lese ich unter dem Tisch mein Buch über die Son-nenwinde, und Lukas ärgert Kevin und Knut.“

(aus: Trautmann, T. (2011) : *Jahrgangsgemischte Lerngruppen: Flexibilität der Fördermöglichkeiten.* S. 92. In Inklusive Begabtenför-derung in der Grundschule (Hrsg. Von O. Steenbuck, H. Quitmann, P. Esser). Weinheim, Basel: Beltz.

Probleme beim Einsatz von Sternchen-Aufgaben

Hauptproblem:

- Aufgabeninhalte und Schwierigkeitsniveaus sind für die Kinder vorgegeben.

Hieraus ergibt sich:

- Kleine Mathe-Asse werden nur z.T. entsprechend ihren individuellen Voraussetzungen, Interessen, Denkstilen, … gefördert.
- Die SuS haben kaum Möglichkeiten für ein selbst bestimmtes Mathematiktreiben.
- Die SuS haben nur eingeschränkte Möglichkeiten, ihre Kreativität zu entfalten.
- Die Motivation zum Lösen von Sternchen-Aufgaben ist bei den SuS von der jeweiligen Aufgabe abhängig.

Probleme der Binnendifferenzierung

- Es ist eine Differenzierung, die von der Lehrkraft (und nicht von den SuS) ausgeht.
- Mit dieser Differenzierungsform wird nicht der großen Vielfalt indivi-dueller Lernbedarfe und -potenziale von SuS entsprochen.
  Es besteht vielmehr die Gefahr einer Stigmatisierung.
- Binnendifferenzierende Maßnahmen berücksichtigen meist relativ einseitig die vertikale, aber nicht die horizontale Heterogenität von SuS.
- Mit der Binnendifferenzierung wird nicht selbstbestimmtes bzw. eigenverantwortliches Lernen von SuS gefördert.
- Die Aufgaben der Binnendifferenzierung sind nur z.T. auf die Förde-rung prozessbezogener Kompetenzen der Bildungsstandards ge-richtet und sie entsprechen meist nicht dem Wesen von Mathematik.

Vorzüge der „natürlichen Differenzierung“

- Es ist eine Differenzierung, die von den SuS (und nicht von der Lehrkraft) ausgeht.
- Mit dieser Differenzierungsform kann der großen Vielfalt individueller Lernbedarfe und -potenziale von SuS sehr gut entsprochen werden. Es besteht keine Gefahr einer Stigmatisierung!
- Mit dieser Differenzierungsform wird selbstbestimmtes bzw. eigenverantwortliches Lernen von SuS explizit gefördert.
- Die offenen substanziellen Aufgaben eignen sich sehr gut für die Förderung prozessbezogener Kompetenzen der Bildungsstandards und sie entsprechen sehr gut dem Wesen von Mathematik (z.B. als „freies Gedankenspiel“, als ein „offenes System“, das sich in einem wechselseitigen Prozess von Vermutungen, Widerlegungen, Beweisen, … Aufstellen von Theorieansätzen stetig weiterentwickelt, …)

Wie verschieden sind mathematisch begabte Kinder und wie kann dieser Heterogenität im Unterrichtsalltag entsprochen werden?

- **Einsatz offener substanzieller Aufgaben mit Möglichkeiten für eine natürliche Differenzierung**

… integriert in potenzialfördernde Lernumgebungen mit

- **einer professionellen Lernbegleitung durch Lehrpersonen,**
- **Selbstbestimmungspotenzialen für jede Schülerin / jeden Schüler,**
- **einer angemessenen und flexibel umsetzbaren Zeitplanung, ebenso einer freien Wahl von Lernmitteln, von digitalen Medien, der Beachtung von Genderspezifikas, einer freien Wahl von Lösungswegen und -darstellungen sowie einer sozialen Lernform durch die Schüler/-innen**

4. Forscherstunden – ein innovatives Unterrichtsformat für alle Schüler/-innen im Regelunterricht

Leitideen einer Forscherstunde

- Anknüpfend an ihre (natürliche) Wissbegier erforschen SuS in einer Unterrichtsstunde mathematische Zusammenhänge in vorgegebenen oder mit ihnen vereinbarten offenen substanziellen Aufgabenfeldern.
- Jede Schülerin / jeder Schüler kann gemäß Ihren/seinen Potenzialen und Bedarfen selbstbestimmt in unterschiedlicher Tiefe forschend tätig sein.
- Jeder Lernenden kann selbst über Forscherschwerpunkte, die Wahl von Lösungswegen, die Nutzung von Lernmitteln, die soziale Lernform, die Darstellung von Lösungen, … entscheiden („Natürliche Differenzierung“).
- Mit Forscherstunden erleben alle SuS den Sinn mathematisch-produktiven Tuns, ein Wesensmerkmal von Mathematik.

4. Forscherstunden als ein spezielles Unterrichtsformat der Begabtenförderung in den Übergangsklassen

Generelle Anforderungen an eine Forscheraufgabe

- Der Aufgabeninhalt soll eine inhaltliche Vielfalt und Offenheit gewährleisten (reichhaltige mathematische „Substanz“).
- Möglichst alle SuS sollten eine Chance haben, sich mit der Aufgabe erfolgreich auseinander zu setzen.
- Der Aufgabeninhalt sollte für möglichst alle SuS interessant sein.
- Es sollte eine Offenheit bzgl. der Wahl von Lösungswegen, von Hilfsmitteln und der Ergebnisdarstellungen bestehen.

3. Forscherstunden als ein spezielles Unterrichtsformat der Begabtenförderung in den Übergangsklassen

Generelle Anforderungen an eine Lehrperson

- Vertrauen in die Problemlösekompetenzen <u>aller</u> SuS haben.
- „Kunst der pädagogischen Zurückhaltung“ beherzigen.
- SuS zubilligen, selbst über ihre Organisationsform, über die Nutzung von Arbeitsmaterialien, über Lösungswege, die Lösungsdarstellung, … zu entscheiden.
- SuS beim Finden und Entwickeln ihrer individuell bevorzugten Problemlösestile helfen.
- Ausreichend Zeit für die Phase der Problembearbeitung sowie der Ergebnispräsentation und -diskussion einplanen.

3. Forscherstunden als ein spezielles Unterrichtsformat der Begabtenförderung in den Übergangsklassen

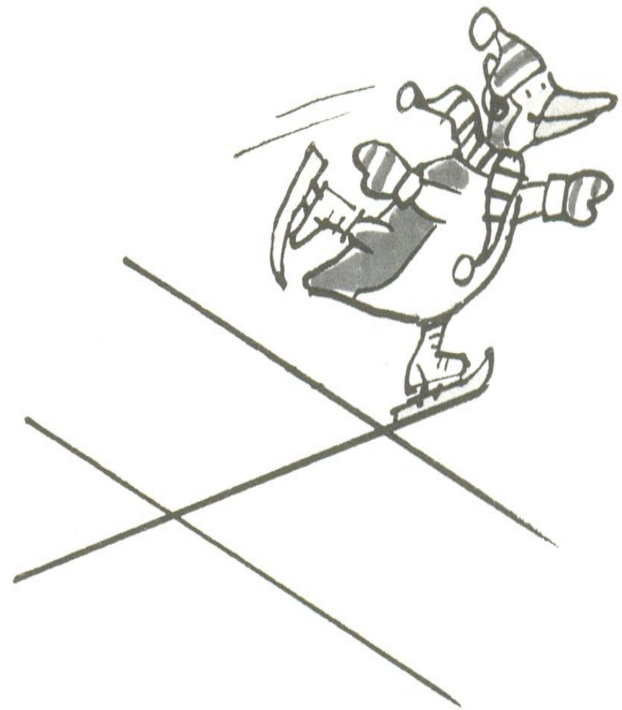
Typischer Ablauf einer Forscherstunde

- *Gemeinsamer Einstieg*: Vertrautmachen mit einem Themenkomplex anhand eines „Einstiegsproblems“ und Entwickeln von Forscherfragen
- *Forscherphase*: Jedes Kind erforscht entsprechend seinen Potenzialen und Bedarfen selbstbestimmt das Aufgabenfeld (freie Wahl der sozialen Lernform, der Nutzung von Lernmitteln, der Lösungswege und -darstell-ung).
- *Gemeinsame Auswertung*: Präsentation, Vergleich und Diskussion der Forscherergebnisse, Ausblick auf Anschlussprobleme

2. Beispiel einer Forscherstunde für den MU der Kl. 6-10: Schnittpunkte von Geraden

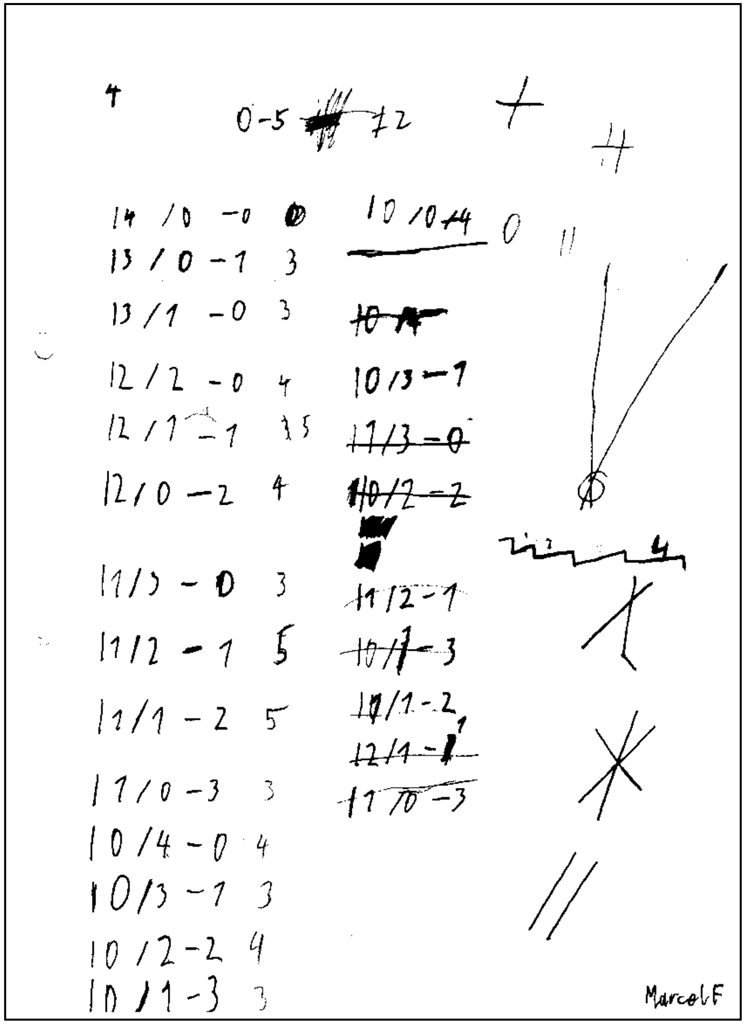
Forscheraufgabe:

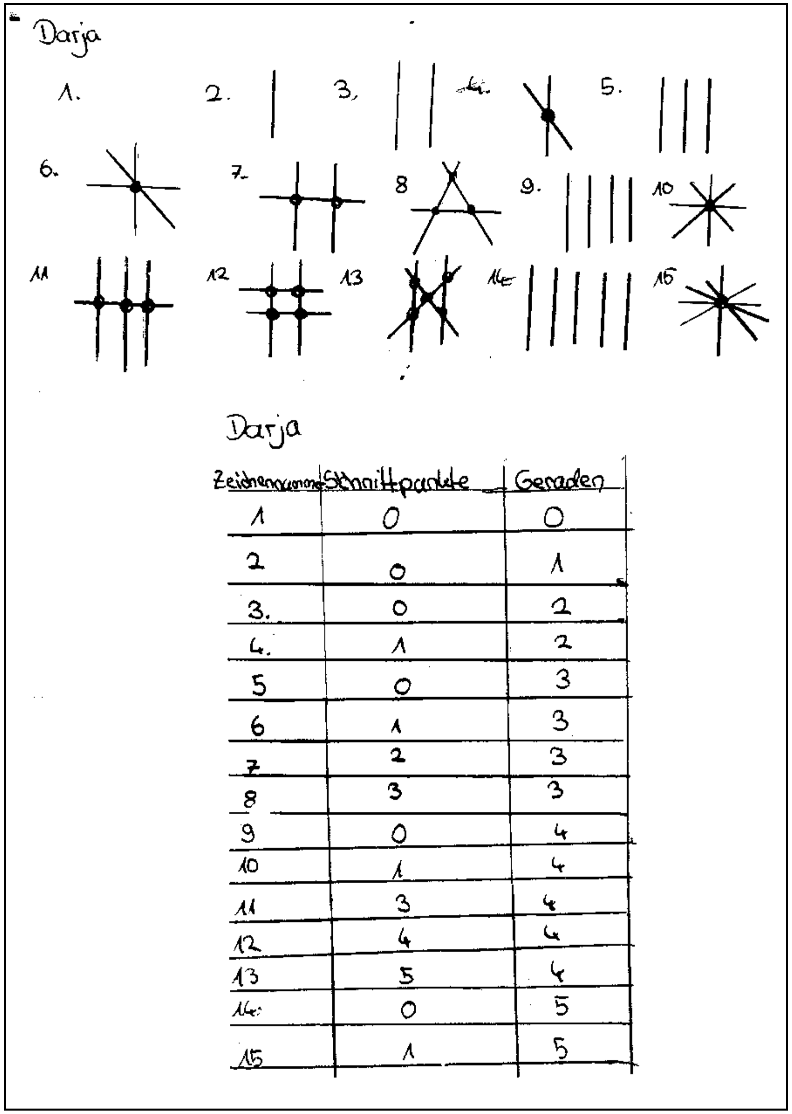
Erkunde alle Möglichkeiten für die Anzahlen
von Schnittpunkten bei 1, 2, 3, 4 und 5 Geraden.
Stelle zuerst Vermutungen zu den Anzahlen
der Schnittpunkte und zu Zahlbeziehungen zwischen
den Anzahlen auf.
Überlege, wie du deine Ergebnisse übersichtlich
und geordnet darstellen kannst.



2. Beispiel einer Forscherstunde für den MU der Kl. 6-10: Schnittpunkte von Geraden

Schülerlösungen:





Zeichennummer	Schnittpunkte	Geraden
1	0	0
2	0	1
3.	0	2
4.	1	2
5	0	3
6	1	3
7	2	3
8	3	3
9	0	4
10	1	4
11	3	4
12	4	4
13	5	4
14	0	5
15	1	5

2. Beispiel einer Forscherstunde für den MU der Kl. 6-10: Schnittpunkte von Geraden

Anzahl der Geraden	Anzahl der Schnittpunkte																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	X																					
2	X	X																				
3	X	X	X	X																		
4	X	X		X	X	X	X															
5	X	X			X	X	X	X	X	X	X											
6	X	X				X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X						
7	X	X					X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

2. Beispiel einer Forscherstunde für den MU der Kl. 6-10: Schnittpunkte von Geraden

n - Anzahl der Geraden	Maximalzahl von Schnittpunkten
1	0
2	0 + 1 = 1
3	1 + 2 = 3
4	3 + 3 = 6
5	6 + 4 = 10
6	10 + 5 = 15
7	15 + 6 = 21
8	21 + 7 = 28

Allgemein: $x = n \cdot (n - 1) : 2$ (x – Anzahl der Schnittpunkte, n –Anzahl der Geraden)

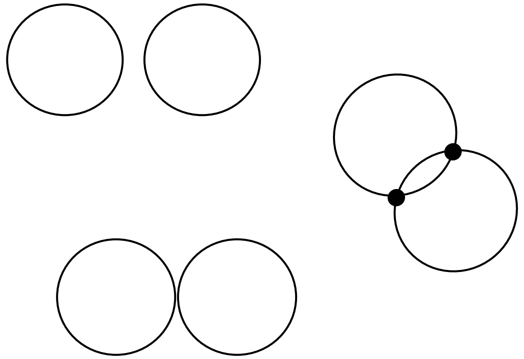
3. Beispiel einer Forscherstunde im MU der 8. bis 10. Klasse

Thema: Schnittpunkte von Kreisen

Forscheraufgabe:

Wie viele Schnittpunkte können 2, 3, 4 oder 5 Kreise in der Ebene haben?

Welche Muster kannst du entdecken?

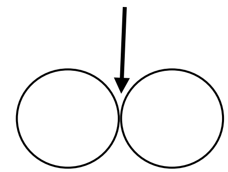


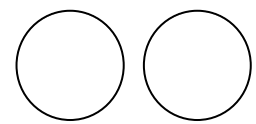
Thomas‘ Lösung:

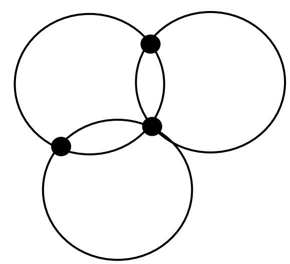
Klar war sofort:

- **0 Schnittpunkte gibt es immer.**
- **1 Schnittpunkt kann es nie geben.**
- **Eine ungerade Anzahl von Schnitt-punkten kann es nicht geben.**
- **Die Anzahl der Schnittpunkte vergrößert sich nach einem bestimmten System.**

Das ist ein Berührungspunkt, aber kein Schnittpunkt!

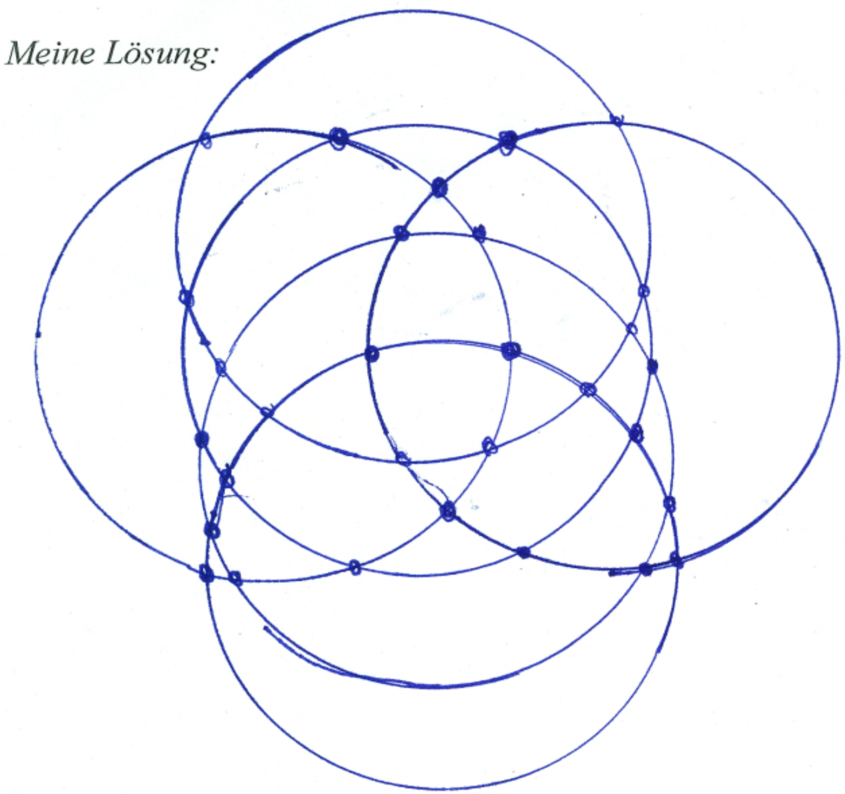






Das sind nicht 3, sondern 4 Schnitt-punkte.

Thomas‘ Lösung:



max. Zahl d. Schnittp.

2 : 2) 4

2·3=: 6) 6 =

2·4||: 12) 8 ||

2·5x: 20) 10 x

2·6–: 30) 12 –

2·7|: 42) 2

8 :56) 14|

Thomas‘ Lösung:

2 : 0, 2

3 : 0, 2, 4, 6

4 : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12

5 : a. g. ~~u~~ bis 20

6 : a. g. bis 30

Formel für die Anzahl der verschiedenen Schnittpunkte

$a_n = n \cdot (n-1) : 2 + 1$

4. Beispiel einer Forscherstunde: Kopfrechentrick

Forscheraufgabe:

- Erforsche an selbstgewählten Beispielen einen Kopfrechentrick für das Bestimmen der Quadratzahl einer zweistelligen natürlichen Zahl mit der Einerzahl 5. (Beispiel: $45^2 = 2\,025$)

- Beweise die allgemeine Gültigkeit des Kopfrechentricks.

4. Beispiel einer Forscherstunde: Kopfrechentrick

Erläuterung des Kopfrechentricks für das Bestimmen von Quadratzahlen für 2-stellige Zahlen mit der Einerzahl 5 an einem Beispiel:

Beispiel: $25^2 = 20 \bullet 30 + 25 = 625$

Lösungsschritte:

- Die letzten beiden Ziffern der Quadratzahl sind stets 25.
- Die Hunderter- und ggf. Tausenderzahl ergibt sich aus dem Produkt der Zehnerzahl der zu quadrierenden Zahl und ihrem Nachfolger (im Beispiel: $2 \bullet 3 = 6$).

Allgemeiner Beweis des Rechentricks:

Voraussetzung: Sei *x* eine beliebige natürliche zweistellige Zahl mit der Endziffer *5*

Behauptung: Es gilt: $x^2 = (y+5)^2 = (y+10) \cdot y + 25$ mit $10 \mid y$ (y–Zehnerzahl der 2-stelligen Zahl).

Beweis:

Es gilt: $x^2 = (y + 5)^2$ (Festlegung der Zehner- und Einerzahl nach Vor.)

$= (y + 5) \cdot (y + 5)$ (Definition „Quadrieren von Binomen)

$= y^2 + 2 \cdot 5 \cdot y + 5 \cdot 5$ (Regeln für die Multiplikation von Binomen)

$= y^2 + 10 \cdot y + 25$ (Zusammenfassen gleicher Glieder)

$= (y + 10) \cdot y + 25$ (Distributivgesetz der „Multipl.“ bzgl. der „Addit.“ in N)

q.e.d.

4. Kleingruppenarbeit: Entwicklung einer Forscherstunde im Mathematikunterricht (Übergang VS – weiterführende Schule)

Erkundungsauftrag:
Kann man jede natürliche Zahl von 1 bis 50 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen? Was kann man hierbei entdecken?

Beispiele für solche Zerlegungen der Zahlen von 1 bis 50:

1 = 0 + 1	6 = 1 + 2 + 3	11 = 5 + 6	16 = ?
2 = ?	7 = 3 + 4	12 = 3 + 4 + 5	17 = 8 + 9
3 = 1 + 2	8 = ?	13 = 6 + 7	18 = 5 + 6 + 7
4 = ?	9 = 2 + 3 + 4	14 = 2 + 3 + 4 + 5	19 = 9 + 10
5 = 2 + 3	10 = 1 + 2 + 3 + 4	15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6	20 = 2 + 3 + 4 +5+ 6

Fragen für die Workshop-Arbeit:
- Welche Zahl- und Rechenmuster können die SuS entdecken?
- Welche anspruchsvollen mathematischen Probleme stecken in der Forscheraufgabe?
- Inwiefern wird in der Forscherstunde die natürliche Differenzierung umgesetzt?
- Welche Lernmittel würden Sie in der Forscherstunde allen SuS anbieten?

4. Kleingruppenarbeit: Entwicklung einer Forscherstunde im Mathematikunterricht (Übergang VS – weiterführende Schule)

Erkundungsauftrag:
Kann man jede natürliche Zahl von 1 bis 50 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen? Was kann man hierbei entdecken?

Beispiele für solche Zerlegungen der Zahlen von 1 bis 50:

1 = 0 + 1	11 = 5 + 6	21 = 10 + 11 = 6 + 7 + 8
2 = ?	12 = 3 + 4 + 5	22 = 4 + 5 + 6 + 7
3 = 1 + 2	13 = 6 + 7	23 = 11 + 12
4 = ?	14 = 2 + 3 + 4 + 5	24 = 7 + 8 + 9
5 = 2 + 3	15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6	25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7
6 = 1 + 2 + 3	16 = ?	26 = 5 + 6 + 7 + 8
7 = 3 + 4	17 = 8 + 9	27 = 8 + 9 + 10
8 = ?	18 = 5 + 6 + 7	28 = 1+ 2 + 3 + 4 + 5+ 6 + 7
9 = 2 + 3 + 4	19 = 9 + 10	29 =14 + 15
10 = 1 + 2 + 3 + 4	20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6	30 = 9+10+11 = 6+7+8+9

4. Kleingruppenarbeit: Entwicklung einer Forscherstunde im Mathematikunterricht (Übergang VS – weiterführende Schule)

Erkundungsauftrag:
Kann man jede natürliche Zahl von 1 bis 50 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen? Was kann man hierbei entdecken?

Beispiele für solche Zerlegungen der Zahlen von 1 bis 50:

1 = 0 + 1	11 = 5 + 6	21 = 10 + 11 = 6 + 7 + 8
2 = ?	12 = 3 + 4 + 5	22 = 4 + 5 + 6 + 7
3 = 1 + 2	13 = 6 + 7	23 = 11 + 12
4 = ?	14 = 2 + 3 + 4 + 5	24 = 7 + 8 + 9
5 = 2 + 3	15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6	25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7
6 = 1 + 2 + 3	16 = ?	26 = 5 + 6 + 7 + 8
7 = 3 + 4	17 = 8 + 9	27 = 8 + 9 + 10
8 = ?	18 = 5 + 6 + 7	28 = 1+ 2 + 3 + 4 + 5+ 6 + 7
9 = 2 + 3 + 4	19 = 9 + 10	29 =14 + 15
10 = 1 + 2 + 3 + 4	20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6	30 = 9+10+11 = 6+7+8+9

4. Kleingruppenarbeit: Entwicklung einer Forscherstunde im Mathematikunterricht (Übergang VS – weiterführende Schule)

Erkundungsauftrag:
Kann man jede natürliche Zahl von 1 bis 50 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen? Was kann man hierbei entdecken?

Beispiele für solche Zerlegungen der Zahlen von 1 bis 50:

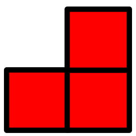
1 = 0 + 1	11 = 5 + 6	21 = 10 + 11 = 6 + 7 + 8
2 = ?	12 = 3 + 4 + 5	22 = 4 + 5 + 6 + 7
3 = 1 + 2	13 = 6 + 7	23 = 11 + 12
4 = ?	14 = 2 + 3 + 4 + 5	24 = 7 + 8 + 9
5 = 2 + 3	15 =7+8=4+5+6=1+2+3+4+5	25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7
6 = 1 + 2 + 3	16 = ?	26 = 5 + 6 + 7 + 8
7 = 3 + 4	17 = 8 + 9	27 = 8 + 9 + 10
8 = ?	18 = 5+6+7= 3+4+5+6	28 = 1+ 2 + 3 + 4 + 5+ 6 + 7
9 = 2 + 3 + 4	19 = 9 + 10	29 =14 + 15
10 = 1 + 2 + 3 + 4	20 = 2+3+4+5+6	30 = 9+10+11 = 4+5+6+7+8

4. Kleingruppenarbeit: Entwicklung einer Forscherstunde im Mathematikunterricht (Übergang VS – weiterführende Schule)

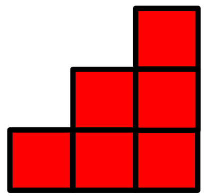
Erkundungsauftrag:

Kann man jede natürliche Zahl von 1 bis 50 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen? Was kann man hierbei entdecken?

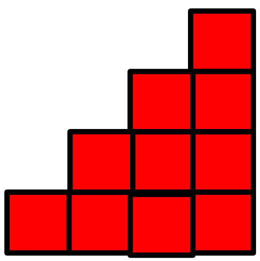
Übersetzen in anschaulich-geometrische Lösungsmuster:



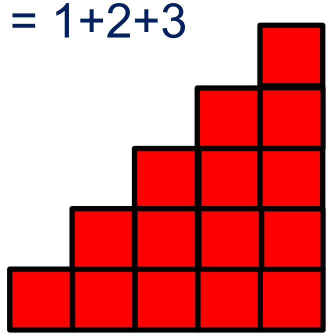
3 = 1+2



6 = 1+2+3



10 =1+2+3+4



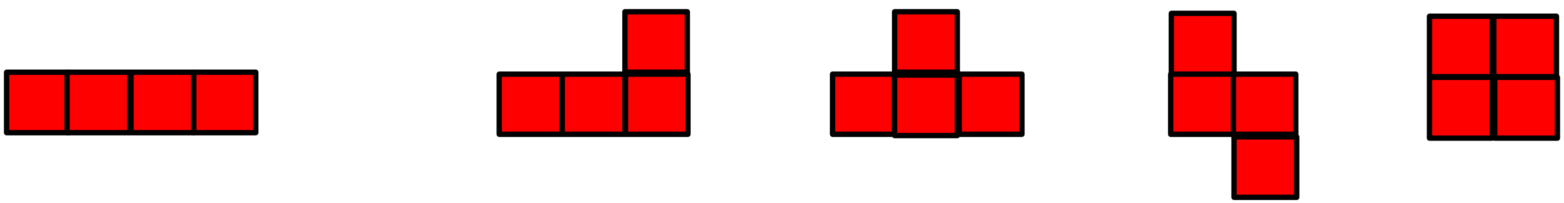
15 = 1+2+3+4+5

Die Summe aufeinanderfolgender nat. Zahlen ist stets eine „**Treppe**“. Man kann Zweier-, Dreier-, Vierer-, Fünfer-, … -treppen bilden. Die 2er-Treppen passen immer zu Primzahlen (außer 2) und zu den ungeraden Zahlen (größer als 2), die 3er-Treppen zu Vielfachen von 3, die 5er-Treppen zu den Vielfachen von 5, …

4. Kleingruppenarbeit: Entwicklung einer Forscherstunde im Mathematikunterricht (Übergang VS – weiterführende Schule)

Das **Übersetzen in anschaulich-geometrische Lösungsmuster** ist sinnvoll für das Erkennen und Begründen, dass es keine Darstellungen für 2, 4 , 8, 16, 32, … als Summe aufeinanderfolgender nat. Zahlen gibt:

Beispiel: Alle Möglichkeiten für Quadratvierlinge:



→ Wir können keine „**Treppe**“ mit genau 4 Quadraten bilden.

Alternative Begründung dafür, dass es keine Darstellungen für 2, 4 , 8, 16, 32, … als Summe aufeinanderfolgender nat. Zahlen gibt: Angeben aller möglichen Fälle für z.B. die Summe 4: 0+4, 1+3, 2+2, 1+1+2, 1+1+1+1, ...

→ 4 lässt sich nicht als Summe aufeinanderfolgender Zahlen darstellen.

4. Kleingruppenarbeit: Entwicklung einer Forscherstunde im Mathematikunterricht (Übergang VS – weiterführende Schule)

Zu entdeckende schöne Rechenmuster:

1 + 2 = 3	1 + 2 + 3 = 6	1 + 2 + 3 + 4 = 10	1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
2 + 3 = 5	2 + 3 + 4 = 9	2 + 3 + 4 + 5 = 14	2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20
3 + 4 = 7	3 + 4 + 5 =12	3 + 4 + 5 + 6 = 18	3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25
4 + 5 = 9	4 + 5 + 6 =15	4 + 5 + 6 + 7 = 22	4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30
5 + 6 = 11	5 + 6 + 7 =18	5 + 6 + 7 + 8 = 26	5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35
6 + 7 = 13	6 + 7 + 8 =21	6 + 7 + 8 + 9 = 30	6 + 7 + 8 + 9 +10= 40

…

Zu entdeckende schöne Rechenmuster:

1 + 2 = 3	2 + 3 = 5
1 + 2 + 3 = 6	2 + 3 + 4 = 9
1 + 2 + 3 + 4 = 10	2 + 3 + 4 + 5 =14
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15	2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21	2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28	2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36	2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44

…