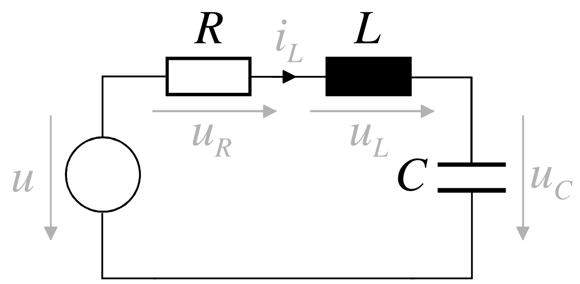
Lösungen zu Kapitel 1

Beispiel 1: Als Zustandsvariablen werden die Spannung u_C an der Kapazität und der Strom i_L durch die Induktivität gewählt, d.h.

$$x_1 = i_L \quad \text{und} \quad x_2 = u_C.$$



Für die Spannung an der Induktivität und den Strom durch die Kapazität gilt:

$$u_L = L\frac{dx_1}{dt} \quad \text{und} \quad i_C = C\frac{dx_2}{dt}.$$

Die Spannungsbilanz ergibt unter Benutzung des *Ohmschen* Gesetzes

$$u = u_R + u_L + u_C = Rx_1 + L\frac{dx_1}{dt} + x_2.$$

Daraus resultiert die Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u. \tag{1}$$

Die zweite Differentialgleichung ergibt sich aus

$$i_C = C\frac{dx_2}{dt} = i_L = x_1,$$

d.h.

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C}x_1 \tag{2}$$

Mit Hilfe des Zustandsvektors

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_L \\ u_C \end{pmatrix}$$

können die Differentialgleichungen (1) und (2) in Matrixschreibweise angegeben werden:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}}\mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}} u.}$$

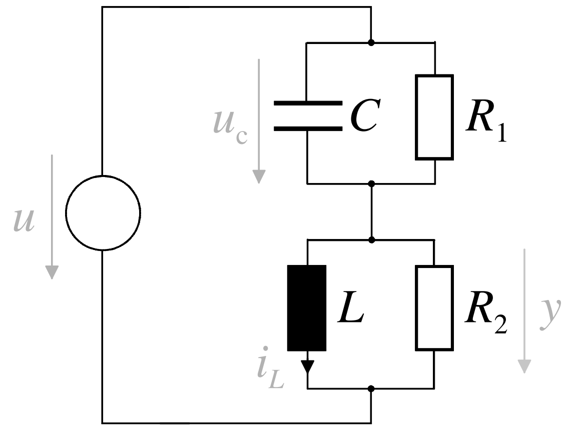
Für die Ausgangsgleichung gilt:

$$\boxed{y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{c}^T} \mathbf{x}}$$

Der Wert d verschwindet offensichtlich, d.h. es gibt *keinen* Durchgriff von u nach y.

Beispiel 2: Als Zustandsvariablen werden die Spannung an der Kapazität sowie der Strom durch die Induktivität gewählt:

$$x_1 = u_C \quad \text{und} \quad x_2 = i_L.$$



Eine Zustandsdifferentialgleichung erhält man direkt aus

$$u = u_c + L\frac{di_L}{dt} = x_1 + L\frac{dx_2}{dt},$$

d.h.

$$L\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u. \tag{1}$$

Die Strombilanz ergibt

$$C\frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{R_1}x_1 = x_2 + \frac{1}{R_2}L\frac{dx_2}{dt} \overset{(1)}{=} x_2 + \frac{1}{R_2}\left(-x_1 + u\right).$$

Daraus folgt unmittelbar

$$C\frac{dx_1}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)x_1 + x_2 + \frac{1}{R_2}u \tag{2}$$

Die Ausgangsgröße erhält man aus der Beziehung

$$u = x_1 + y \quad \Rightarrow \quad y = -x_1 + u \tag{3}$$

Mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix}$$

lautet das mathematische Modell (1),(2),(3) in Matrixschreibweise

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}} u \\ y &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{c}^T} \mathbf{x} + \underbrace{1}_{==:d} \cdot u \end{aligned}}$$