Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 27.06.2024

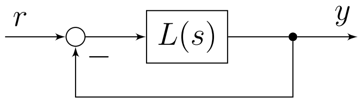
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	3	1	2	3	3	3	3	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße r, Ausgangsgröße y und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,



wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} = K\frac{s+1}{s-3},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des geschlossenen Kreises.

b) Zeichnen Sie die Lage der Pole von $T(s)$ in Abhängigkeit von K in der komplexen Ebene.

c) Geben Sie die Werte von K an, für die der Realteil eines Pols p von $T(s)$
   (i) bei 0 liegt, d.h. $\operatorname{Re}\{p\} = 0$,
   (ii) im unendlichen liegt, d.h. $\operatorname{Re}\{p\} = \pm\infty$,
   (iii) bei 3 liegt, d.h. $\operatorname{Re}\{p\} = 3$.

d) Beschreiben Sie in Worten, was die Wurzelortskurve darstellt, und wie Ihre Zeichnung zu lesen ist.

Hinweis: Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n}|s-\alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m}|s-\beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt s_0 gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\alpha_k - \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln ψ_i der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i \cdot 180}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K > 0 \\ 2k \text{ für } K < 0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-\beta_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-\alpha_k}.$$

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 2s^2 + (1-K)s + 3K}$$

mit dem reellen Parameter K.

a) Für welche Werte K ist $G(s)$ BIBO-stabil?

b) Können Sie für $K = \frac{1}{3}$ ein beschränktes Eingangssignal $u(t)$, d.h. $|u(t)| < U \in \mathbb{R}\, \forall t$, finden, für das das Ausgangssignal $y(t)$ divergiert?

Aufgabe 3:

Gegeben ist das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x},\end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, dem Eingangssignal u und dem Ausgangssignal y. Das Eingangssignal ist gegeben durch $u = \sigma(t) + 2\sigma(t-1) - 3\sigma(t-2)$, mit der Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t < 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Endzustand $\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ für einen beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$. *Begründen Sie Ihre Antwort!*

Aufgabe 4:

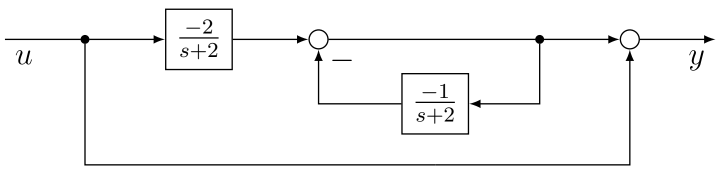
Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \end{bmatrix} u_k \tag{1}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$ und der Eingangsfolge u_k. Bestimmen Sie für konstantes $u_k = u_R\, \forall k$, $u_R \in \mathbb{R}$, alle Ruhelagen des Systems in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5:

Gegeben ist das folgende Übertragungssystem.



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des Gesamtsystems. Geben Sie $G(s)$ ohne Doppel- bzw Mehrfachbrüche an.

b) Geben Sie eine Minimalrealisierung von $G(s)$ als Zustandsraummodell an.

c) Geben Sie eine Realisierung von $G(s)$ an, die weder steuerbar noch beobachtbar ist. Überprüfen Sie Ihr System auf beide Eigenschaften.

Aufgabe 6:

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \cos(u) \\ y &= x_1 x_2 u. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = \pi$ ist. Bestimmen Sie außerdem den Wert y_R des Ausgangssignals in dieser Ruhelage.

b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u \end{aligned}$$

an wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

Aufgabe 7:

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und dem Eingangssignal $u(t)$.

a) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

b) Geben Sie die Formeln zur Berechnung der freien Lösung $\mathbf{x}_f(t)$ sowie der erzwungenen Lösung $\mathbf{x}_e(t)$ an.

c) Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 3$ sei gegeben mit $\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ und $u(t) = 0\,\forall t$. Ermitteln Sie den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$.

Aufgabe 8:

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u_k, der Ausgangsgröße y_k und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k - 2u_k. \end{aligned}$$

Führen Sie eine Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_k$ so durch, dass das transformierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k \\ y_k &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}_k + \tilde{d}u_k \end{aligned}$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik**
am 09.10.2024

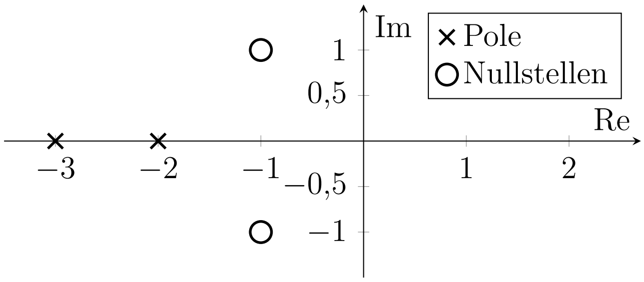
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	2	2	3	2	3	3	3	3	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgenden PN-Plan der Übertragungsfunktion $G(s)$ eines zeitkontinuierlichen linearen zeitinvarianten Übertragungssystems (alle eingezeichneten Pole und Nullstellen haben Vielfachheit eins).



Ferner ist bekannt, dass für die Ausgangsgröße $y(t)$ bei der Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$ (d.h. bei einem Einheitssprung) gilt

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1.$$

Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.

Aufgabe 2:

Geben Sie ein zeitkontinuierliches lineares zeitinvariantes Zustandsmodell erster Ordnung mit der Zustandsvariable x, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y an, das die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) Sprungfähigkeit; (ii) asymptotische Stabilität.

Hinweis: Es ist *ein* System gesucht, das *beide* Eigenschaften besitzt, *nicht* zwei Systeme!

Aufgabe 3:

Geben Sie die *Definitionen* folgender Eigenschaften eines linearen zeitkontinuierlichen Systems mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ an:

(i) asymptotische Stabilität; (ii) BIBO-Stabilität.

Beschreiben Sie außerdem in eigenen Worten, wodurch sich die beiden Eigenschaften unterscheiden!

Aufgabe 4:

Gegeben Sei ein Zustandsmodell zweiter Ordnung mit der Eingangsgröße u und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

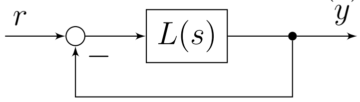
Geben Sie jeweils eine mögliche Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und einen möglichen Eingangsvektor $\mathbf{b}$ für $u = u_R = 1$ an, so dass das System

(i) eine Ruhelage (ii) keine Ruhelage (iii) unendlich viele Ruhelagen

besitzt.

Aufgabe 5:

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße r, Ausgangsgröße y und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,

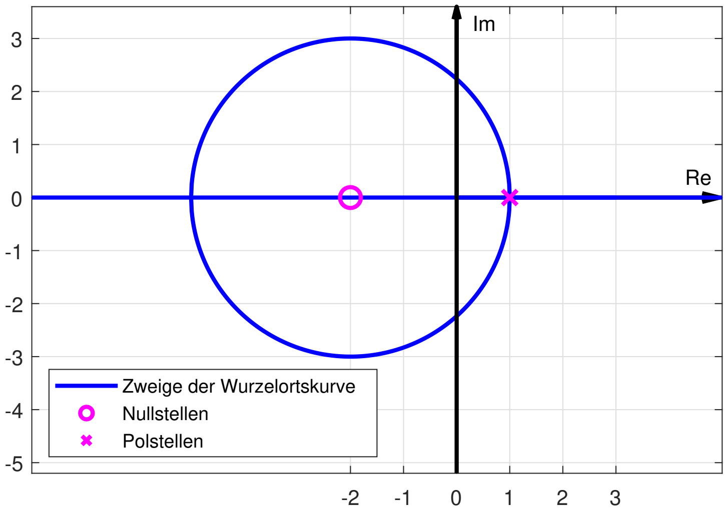


wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

Außerdem sind die Zweige der Wurzelortskurve, sowie alle Nullstellen und Pole von $L(s)$ in der folgenden Abbildung zu sehen.



a) Ergänzen Sie die Abbildung der Wurzelortskurve um die Richtungen der Zweige der Wurzelortskurve.

b) Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstellen/Pole von $L(s)$ in der Abbildung. Geben Sie $L(s)$ an.

c) Bezeichnen Sie die entsprechenden Bereiche der Wurzelortskurve für $K < 0$ und $K > 0$ in der Abbildung.

d) Bestimmen Sie anhand der Wurzelortskurve für welche Werte K der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist. *Hinweis:* Dafür müssen Sie die Schnittpunkte der Wurzelortskurve mit der imaginären Achse berechnen.

Hinweis: Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n}|s-\alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m}|s-\beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt s_0 gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\alpha_k - \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln ψ_i der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i \cdot 180}{n-m} \quad \text{wenn } m < n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K > 0 \\ 2k \text{ für } K < 0 \end{cases} \quad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-\beta_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s-\alpha_k}.$$

Aufgabe 6:

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u_k, der Ausgangsgröße y_k und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -12 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} -3.5 & 2.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_k. \end{aligned}$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_k$ so durch, dass das transformierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k \\ y_k &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}_k + \tilde{d}u_k \end{aligned}$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

Aufgabe 7:

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \cos(u) \\ y &= x_1 x_2 u. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi} \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = 2\pi$ ist.

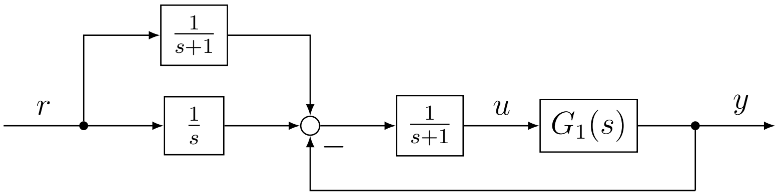
b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System an in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u. \end{aligned}$$

c) Definieren Sie die Größen $\Delta\mathbf{x}$, Δu und Δy des linearisierten Systems.

Aufgabe 8:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme mit der Eingangsgröße r und der Ausgangsgröße y.



Hierbei ist $G_1(s)$ die Übertragungsfunktion des LZI Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u$$

mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}$ des LZI Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße r und der Ausgangsgröße y. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.