# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 27.06.2023

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei das nichtlineare mathematische Modell eines dynamischen Systems mit der Eingangsgröße $u$, der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= -e^{x_1} + x_2 \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -x_1 + \sin(x_3) \\
\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} &= x_2 - \frac{x_1 x_2}{u} \\
y &= x_1^2 + x_2 x_3 + u
\end{aligned}
$$

a) Bestimmen Sie den Zustand $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_{1,R} & x_{2,R} & x_{3,R} \end{bmatrix}^T$, den Eingang $u_R$ und den Ausgang $y_R$, sodass $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ für $u = u_R$ eine Ruhelage des Systems ist. Für welche Werte $u_R$ existiert eine Ruhelage?

b) Linearisieren Sie das System in der zu $u_R = 1$ gehörigen Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\
\Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u
\end{aligned}
$$

an, wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$
G(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3 + 3s^2 + 2s}.
$$

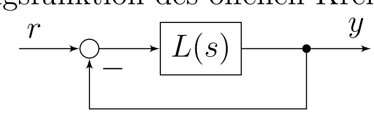
a) Geben Sie das Zustandsraummodell einer Minimalrealisierung von $G(s)$ an.

b) Geben Sie ein Zustandsraummodell von $G(s)$ an, das keine Minimalrealisierung ist.

c) Welche der Realisierungen aus a) und b) ist steuerbar? Welche ist beobachtbar?

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße $r$, Ausgangsgröße $y$ und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,



wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} = K\frac{s+3}{s-1},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des geschlossenen Kreises.

b) Zeichnen Sie die Lage der Pole von $T(s)$ in Abhängigkeit von $K$ in der komplexen Ebene. Für welche Werte $K$ ist $T(s)$ BIBO-stabil?

*Hinweis:* Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n}|s-\alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m}|s-\beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt $s_0$ gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\alpha_k - \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln $\psi_i$ der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i\cdot 180}{n-m} \qquad \text{wenn } m<n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K>0 \\ 2k \text{ für } K<0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0,1,\dots,n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-\beta_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-\alpha_k}.$$

**Aufgabe 4:**

Ermitteln Sie jeweils den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters $k$, für den die einzelnen Polynome Hurwitzpolynome sind.

$$\begin{aligned} i)\quad & p_1(s) = s^5 + 10s^4 + ks^3 + 2s^2 + (k+1)^2 s \\ ii)\quad & p_2(s) = ks^3 + \frac{k}{2}s^2 + 2s + 1 \\ iii)\quad & p_3(s) = 15s^2 + k^2 s + k \end{aligned}$$

**Aufgabe 5:**

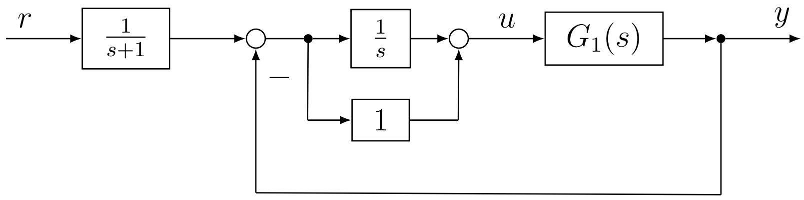
Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

**Aufgabe 6:**

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme mit der Eingangsgröße $r$ und der Ausgangsgröße $y$:




wobei $G_1(s)$ die Übertragungsfunktion des LZI Systems

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u$$

mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ ist. Achten Sie auf das negative Vorzeichen im Ausgangsvektor.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}$ des LZI Systems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße $r$ und der Ausgangsgröße $y$. Geben Sie $G(s)$ in einer vereinfachten Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

**Aufgabe 7:**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du,$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der skalaren Eingangsgröße $u$ und dem skalaren Ausgang $y$. Zusätzlich sei die reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ gegeben.

a) Leiten Sie die Berechnungsvorschriften der Parameter $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ her, wobei

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u$$
$$y = \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z} + \tilde{d}u$$

gilt.

b) In welchem Zusammenhang steht die Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$ des transformierten Systems mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ des ursprünglichen Systems? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Wie kann $\mathbf{T}$ bestimmt werden, wenn $\tilde{\mathbf{A}}$ eine Diagonalmatrix sein soll? Geben Sie alle Schritte an, die zur Berechnung von $\mathbf{T}$ nötig sind. Welche Eigenschaften muss $\mathbf{A}$ haben, sodass eine solche Transformation möglich ist?

**Aufgabe 8:**

Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k\end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^2$, der Eingangsgröße $u_k \in \mathbb{R}$ und der Ausgangsgröße $y_k \in \mathbb{R}$.

a) Ist das freie System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Ermitteln Sie $y_2$, also den Wert der Ausgangsgröße zum Zeitschritt $k = 2$, für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u_k = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 05.10.2023

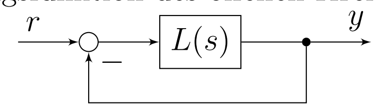
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße $r$, Ausgangsgröße $y$ und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,




wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} = K\frac{s+1}{s^2},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des geschlossenen Kreises.

b) Zeichnen Sie die Lage der Pole von $T(s)$ in Abhängigkeit von $K$ in der komplexen Ebene (Wurzelortskurve). Geben Sie die Schritte an, die zu Ihrer Lösung führen.

c) Verwenden Sie die Wurzelortskurve, um zu bestimmen, für welche Werte von $K$ $T(s)$ BIBO-stabil ist.

*Hinweis:* Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n}|s-\alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m}|s-\beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt $s_0$ gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\alpha_k - \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln $\psi_i$ der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i \cdot 180}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K > 0 \\ 2k \text{ für } K < 0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-\beta_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-\alpha_k}.$$

**Aufgabe 2:**

Das System mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ ist in der Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung angegeben:

$$a_n\frac{\mathrm{d}^n y}{dt^n} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m\frac{\mathrm{d}^m u}{dt^m} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b_0 u. \tag{1}$$

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}$ des Systems. Erklären Sei dabei alle Rechenschritte!

b) Setzen Sie nun $n = 3$, $m = 1$ und $\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_1 & b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ein, und ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den reellen Parameter $\alpha$, sodass $G(s)$ BIBO-stabil ist.

**Aufgabe 3:**

Ein nichtlineares zeitinvariantes System der Form

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(x_1, x_2, x_3, u), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = f_2(x_1, x_2, x_3, u), \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = f_3(x_1, x_2, x_3, u), \tag{4}$$

$$y = g(x_1, x_2, x_3, u) \tag{5}$$

wurde in der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_{1,R} & x_{2,R} & x_{3,R} \end{bmatrix}^T$, $u_R$, $y_R$ linearisiert. Das linearisierte System ist gegeben durch die Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{x_{1,R}} & 0 & \sqrt{x_{3,R}} \\ \sin(x_{2,R}) + u_R & x_{1,R}\cos(x_{2,R}) & 0 \\ 0 & x_{3,R} & x_{2,R} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

den Eingansvektor $\mathbf{b}$ und den Ausgangsvektor $\mathbf{c}^T$ mit

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2,R} \\ -\pi \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

und den Durchgriffsterm $d = 0$. Leider ist die Systembeschreibung des ursprünglichen nichtlinearen Systems verlorengegangen.

a) Schreiben Sie die Dynamik des *linearisierten* Systems an. Definieren Sie auch die Zustände, Eingang und Ausgang des linearisierten Systems.

b) Geben Sie die Funktionen $f_1$, $f_2$, $f_3$ und $g$ *des nichtlinearen Systems* an, sodass das linearisierte System der Dynamik in a) entspricht.

c) In einer Notiz finden Sie den Wert $x_{2,R} = \frac{\pi}{2}$. Ermitteln Sie die zugehörige Ruhelage $\mathbf{x}_R, u_R, y_R$.

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} u,$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 4u$$

mit der Eingangsgröße $u$, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße $y$.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ für den dieses System *beobachtbar* ist.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ für den dieses System *steuerbar* ist.

**Aufgabe 5:**

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u_k$, der Ausgangsgröße $y_k$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_k.$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_k$ so durch, dass das transformierte System

$$\mathbf{z}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k$$
$$y_k = \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}_k + \tilde{d}u_k$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

**Aufgabe 6:**

Von einem linearen zeitinvarianten Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

ist bekannt, dass die Transitionsmatrix die Form

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{M}_1 + e^t\mathbf{M}_2$$

mit konstanten aber unbekannten Matrizen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ hat.

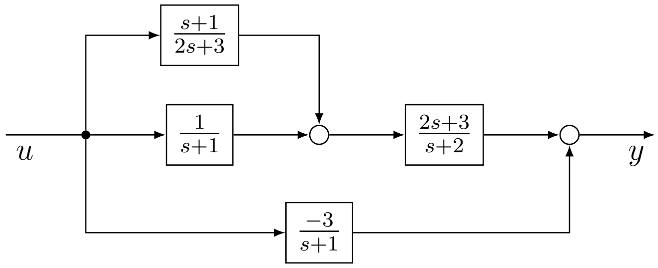
a) Wie lauten die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$?

b) Wie lautet die Inverse $\big(\mathbf{\Phi}(t)\big)^{-1}$ der Transitionsmatrix?

c) Bestimmen Sie $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ in Abhängigkeit der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

**Aufgabe 7:**

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme:




a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

b) Geben Sie alle Pole und Nullstellen von $G(s)$ an. Ist $G(s)$ BIBO-stabil?

c) Ermitteln Sie für die Eingangsgröße $u(t) = \sin(t-1)$ die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand*.

**Aufgabe 8:**

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \tag{8}$$

mit den Zuständen $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} & x_{2,k} \end{bmatrix}^T$ und der Eingangsfolge $u_k$.

a) Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie für die Eingangsfolge $\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ und den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ die Zustände $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ und $\mathbf{x}_5$.

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 12.12.2023

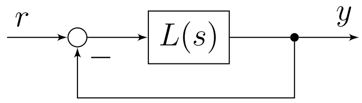
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße $r$, Ausgangsgröße $y$ und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,

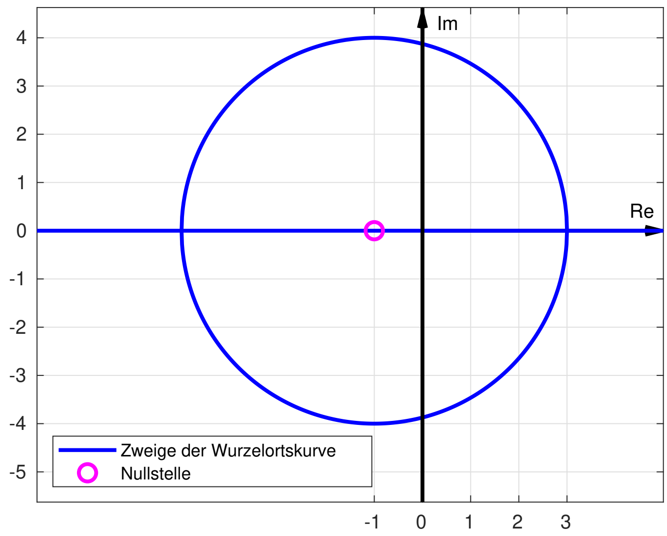



wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

Außerdem sind die Zweige der Wurzelortskurve, sowie eine Nullstelle des geschlossenen Regelkreises in der folgenden Abbildung zu sehen.




a) Ergänzen Sie die Abbildung der Wurzelortskurve um Zeichen für Pole und Nullstellen von $L(s)$, die in der Abbildung fehlen. Zeichnen Sie auch die Richtungen der Zweige der Wurzelortskurve ein.

b) Bezeichnen Sie die entsprechenden Bereiche der Wurzelortskurve für $K < 0$ und $K > 0$ in der Abbildung.

c) Berechnen Sie den/die Verzweigungspunkt/e und zeichen Sie diese/n in der Abbildung ein.

d) Bestimmen Sie anhand der Wurzelortskurve für welche Werte $K$ der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist.

*Hinweis:* Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n} |s - \alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m} |s - \beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt $s_0$ gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \alpha_k - \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Re} \beta_i}{n - m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln $\psi_i$ der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i \cdot 180}{n - m} \qquad \text{wenn } m < n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k + 1 \text{ für } K > 0 \\ 2k \text{ für } K < 0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n - m - 1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - \beta_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s - \alpha_k}.$$

**Aufgabe 2:**

Gegeben ist das autonome System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

mit den Zuständen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Eine Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \ldots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

wird durchgeführt. Die Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}$$

liegt dabei in Diagonalform vor.

a) Leiten Sie die Berechnungsvorschrift für $\tilde{\mathbf{A}}$ her.

b) Zeigen Sie, dass die Spalten $\mathbf{t}_i$ der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ die Rechts-Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$ sind.
*Hinweis:* Das Ergebnis aus a) kann hierbei behilflich sein.

**Aufgabe 3:**

Ermitteln Sie jeweils den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters $k$, für den die einzelnen Polynome Hurwitzpolynome sind.

a) $p_1(s) = s^3 + s^6 + s^2 + s + (k - 2)$

b) $p_2(s) = -s^4 - s^3 - 2s^2 - 2(k + 1)s - 1$

c) $p_3(s) = 17.3s^2 + 31.8s + 12.4$

**Aufgabe 4:**

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \cos(u) \\ y &= x_1 x_2 u. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi} \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = 2\pi$ ist.

b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System an in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u. \end{aligned}$$

c) Definieren Sie die Größen $\Delta\mathbf{x}$, $\Delta u$ und $\Delta y$ des linearisierten Systems.

**Aufgabe 5:**

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines zeitkontinuierlichen LZI Systems sei geben mit

$$G(s) = \frac{s^2 - 1}{s^4 - s^3 - 3s^2 + s + 2}.$$

Ermitteln Sie ein *steuerbares und beobachtbares* Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \end{aligned}$$

welches diese Übertragungsfunktion besitzt.
*(Anmerkung: Gesucht ist <u>ein</u> Zustandsmodell welches steuerbar <u>und</u> beobachtbar ist, nicht zwei Zustandsmodelle mit je einer dieser Eigenschaften.)*

**Aufgabe 6:**

Die Übertragungsfunktion eines Übertragungssystems ist gegeben als

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y\}}{\mathcal{L}\{u\}} = \frac{1}{1 + L(s)}, \tag{1}$$

mit dem Eingangssignal $u$, dem Ausgangssignal $y$. Für die Funktion $L(s)$ gilt dabei

$$L(s) = \frac{(s^2 + 4s + 4)(s - 3) + 1}{s(s + 5)(s + 2)}. \tag{2}$$

a) Spalten Sie $L(s)$ in Teilübertragungsfunktionen $L_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, auf. Dabei müssen die Zähler- und Nennergrade von $L_i(s)$ kleiner oder gleich 1 sein.

b) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Übertragungssystems mithilfe der Teilübertragungsfunktionen $L_i(s)$.

c) Ist $G(s)$ BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 7:**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \qquad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und der Ausgangsgröße $y \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

b) Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Aussage!*)

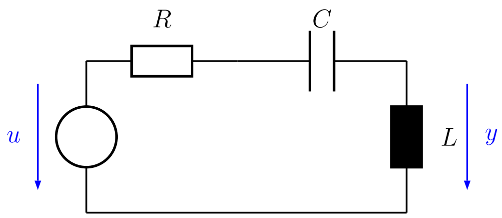
c) Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t_2 = 3$ sei gegeben mit

$$\mathbf{x}(t = t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T .$$

Ermitteln Sie die Ausgangsgröße $y(t = t_1)$ zum Zeitpunkt $t_1 = 1$.

**Aufgabe 8:**

Betrachten Sie das folgende ideale elektrische Netzwerk bestehend aus dem ohmschen Widerstand $R$, der Kapazität $C$, der Induktivität $L$ und einer Spannungsquelle. Die Spannung an der Spannungsquelle wird mit $u$ symbolisiert, mit $y$ wird die Spannung an der Induktivität definiert.




Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du.$$

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 25.01.2024

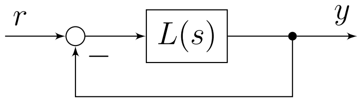
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße $r$, Ausgangsgröße $y$ und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,

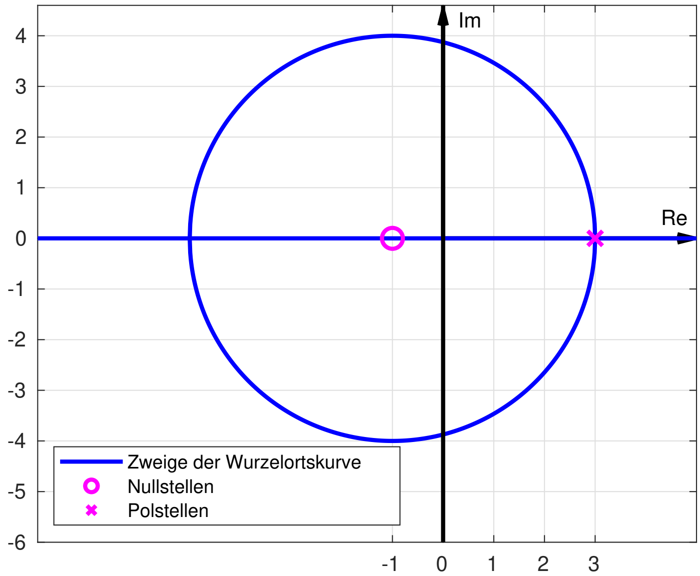



wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

Außerdem sind die Zweige der Wurzelortskurve, sowie alle Nullstellen und Pole von $L(s)$ in der folgenden Abbildung zu sehen.




a) Ergänzen Sie die Abbildung der Wurzelortskurve um die Richtungen der Zweige der Wurzelortskurve.

b) Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstellen/Pole von $L(s)$ in der Abbildung. Geben Sie $L(s)$ an.

c) Bezeichnen Sie die entsprechenden Bereiche der Wurzelortskurve für $K < 0$ und $K > 0$ in der Abbildung.

d) Berechnen Sie den Verzweigungspunkt und zeichen Sie diesen in der Abbildung ein.

e) Bestimmen Sie anhand der Wurzelortskurve für welche Werte $K$ der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist.

*Hinweis:* Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n} |s - \alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m} |s - \beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt $s_0$ gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\alpha_k - \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Re}\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln $\psi_i$ der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i \cdot 180}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K > 0 \\ 2k \text{ für } K < 0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - \beta_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s - \alpha_k}.$$

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u$, der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 3u. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ so, dass das transformierte System

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u \\ y &= \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{z} + \tilde{d}u \end{aligned}$$

in Diagonalform vorliegt. Geben Sie die Parameter $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

**Aufgabe 3:**

Ermitteln Sie jeweils den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters $k$, für den die einzelnen Polynome Hurwitzpolynome sind.

i) $p_1(s) = ks^4 + 2s^3 + k^2s^2 - s + 2$

ii) $p_2(s) = s^3 + 2s^2 + s + k$

iii) $p_3(s) = 15s^2 + ks + 27$

iv) $p_4(s) = s^5 + 10s^4 + ks^3 + 2s^2 + 5$

**Aufgabe 4:**

Gegeben ist das Eingrößensystem

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du,$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, Eingang $u \in \mathbb{R}$ und Ausgang $y \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Dimensionen der Systemparameter $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ und $d$ an.

b) Geben Sie die Berechnungsvorschrift sowie die Dimensionen der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ an.
Geben Sie außerdem die freie Lösung $\mathbf{x}_f(t)$ und die erzwungene Lösung $\mathbf{x}_e(t)$ des Systems in Abhängigkeit vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ und des Eingangssignals $u(t)$ an.

c) Berechnen Sie die Gesamtlösung $\mathbf{x}(t)$ für die Parameter $n = 1$, $\mathbf{A} = [-4]$, $\mathbf{b} = [2]$, den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = 1$ und das Eingangssignal $u(t) = \delta(t-1) + 3\delta(t-3)$ mit dem Dirac-Impuls $\delta(\cdot)$.

d) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf von $\mathbf{x}(t)$ über die Zeit.

**Aufgabe 5:**

Untersuchen Sie folgende Systeme auf Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit. Für welches der gegebenen Systeme ist es möglich, einen Zustandsregler $u = -\mathbf{k}^T\mathbf{x}$ zu entwerfen, sodass $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ gilt?

a)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$
$$y = \begin{bmatrix} -5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} u,$$
$$y = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

wobei die Eigenwerte der Systemmatrix $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ und die reellen Parameter $p, q \neq 0$ sind.

**Aufgabe 6:**

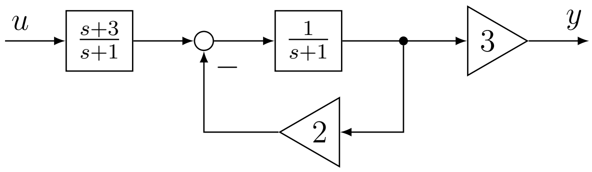
Gegeben sei das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

mit der Eingangsgröße $u$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$. Geben Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ des Systems für $u = u_R = 1$ an und stellen Sie diese in der $x_1 - x_2$-Ebene grafisch dar.

**Aufgabe 7:**

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme:




a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

b) Ist $G(s)$ BIBO-stabil?

**Aufgabe 8:**

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k, \tag{1}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \tag{2}$$

mit den Zuständen $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} & x_{2,k} \end{bmatrix}^T$ und der Eingangsfolge $u_k$.

a) Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}_{d,k}$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

c) Berechnen Sie für die Eingangsfolge $\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ und den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ die Zustände $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ und $\mathbf{x}_5$.

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 13.03.2024

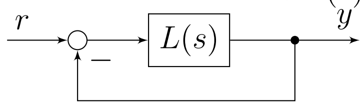
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße $r$, Ausgangsgröße $y$ und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,




wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} = K\frac{s+3}{s-1},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des geschlossenen Kreises.

b) Zeichnen Sie die Lage der Pole von $T(s)$ in Abhängigkeit von $K$ in der komplexen Ebene.

c) Begründen Sie anhand der Wurzelortskurve für welche Werte $K$ die Übertragungsfunktion $T(s)$ BIBO-stabil ist.

*Hinweis:* Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n}|s-\alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m}|s-\beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt $s_0$ gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\alpha_k - \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln $\psi_i$ der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i\cdot 180}{n-m} \qquad \text{wenn } m<n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K>0 \\ 2k \text{ für } K<0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0,1,\dots,n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-\beta_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-\alpha_k}.$$

**Aufgabe 2:**

Gegeben sind zwei in Serie geschaltene Systeme im Zustandsraum.

System 1:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix}0.5\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$v = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}$$

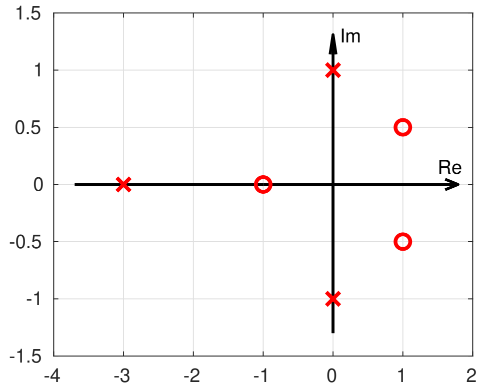
System 2:

$$\dot{\tilde{x}} = 2\tilde{x} + 4v$$
$$y = \tilde{x}$$

Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$.
Besitzt das Gesamtsystem die *BIBO-Eigenschaft*? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

**Aufgabe 3:**

Gegeben ist der PN-Plan der Übertragungsfunktion $G(s)$ vierter Ordnung mit reellen Koeffizienten und Polüberschuss 1:




a) Geben Sie ein mögliches $G(s)$ an.

b) Ist $G(s)$ BIBO-stabil?

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei folgendes nichtlineares Zustandsraummodell mit den Zuständen $x_1$ und $x_2$, der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= x_1 x_2^2 + x_2 \sin x_1,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -x_2 + 4u^2,\\ y &= x_1 x_2 + 5.\end{aligned}$$

Ermitteln Sie für die Ruhelage $\mathbf{x}_R^T = \begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix}^T$, $u_R = 1$ das linearisierte Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u\\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u\end{aligned}$$

wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R, \quad \Delta u = u - u_R \quad \text{und} \quad \Delta y = y - y_R$ gilt.

**Aufgabe 5:**

a) Definieren Sie die Eigenschaft *Beobachtbarkeit*.

b) Beschreiben Sie ein Kriterium, das Sie zur Überprüfung der Beobachtbarkeit verwenden können.

c) Angenommen ein System liegt in Minimalrealisierung vor.
Was können Sie über die Beobachtbarkeit dieses Systems aussagen?

**Aufgabe 6:**

Geben Sie ein zeitkontinuierliches LZI System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\end{aligned}$$

*zweiter Ordnung* mit folgenden Eigenschaften an:

- Die Übertragungsfunktion $G(s)$ dieses Systems hat eine Polstelle bei $s = -1$ und eine Nullstelle bei $s = 3$.
- Das System ist BIBO-stabil.

*(Anmerkung: Gesucht ist <u>ein</u> System mit <u>beiden</u> Eigenschaften, nicht zwei Systeme mit je einer dieser Eigenschaften.)*

**Aufgabe 7:**

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u_k$, der Ausgangsgröße $y_k$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_k.\end{aligned}$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_k$ so durch, dass das transformierte System

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k \\ y_k &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}_k + \tilde{d}u_k\end{aligned}$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

**Aufgabe 8:**

Gegeben ist das autonome zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

mit den Zuständen $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} & x_{2,k} \end{bmatrix}^T$.

a) Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \end{bmatrix}^T$ die Zustände $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$.

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 27.06.2024

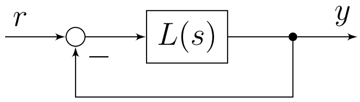
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße $r$, Ausgangsgröße $y$ und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,




wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} = K\frac{s+1}{s-3},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des geschlossenen Kreises.

b) Zeichnen Sie die Lage der Pole von $T(s)$ in Abhängigkeit von $K$ in der komplexen Ebene.

c) Geben Sie die Werte von $K$ an, für die der Realteil eines Pols $p$ von $T(s)$
   (i) bei 0 liegt, d.h. $\mathrm{Re}\{p\} = 0$,
   (ii) im unendlichen liegt, d.h. $\mathrm{Re}\{p\} = \pm\infty$,
   (iii) bei 3 liegt, d.h. $\mathrm{Re}\{p\} = 3$.

d) Beschreiben Sie in Worten, was die Wurzelortskurve darstellt, und wie Ihre Zeichnung zu lesen ist.

*Hinweis:* Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n}|s-\alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m}|s-\beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt $s_0$ gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,\alpha_k - \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Re}\,\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln $\psi_i$ der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i \cdot 180}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K > 0 \\ 2k \text{ für } K < 0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-\beta_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-\alpha_k}.$$

**Aufgabe 2:**

Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 2s^2 + (1-K)s + 3K}$$

mit dem reellen Parameter $K$.

a) Für welche Werte $K$ ist $G(s)$ BIBO-stabil?

b) Können Sie für $K = \frac{1}{3}$ ein beschränktes Eingangssignal $u(t)$, d.h. $|u(t)| < U \in \mathbb{R}\,\forall t$, finden, für das das Ausgangssignal $y(t)$ divergiert?

**Aufgabe 3:**

Gegeben ist das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, dem Eingangssignal $u$ und dem Ausgangssignal $y$. Das Eingangssignal ist gegeben durch $u = \sigma(t) + 2\sigma(t-1) - 3\sigma(t-2)$, mit der Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ wenn } t < 0, \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Endzustand $\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ für einen beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$. *Begründen Sie Ihre Antwort!*

**Aufgabe 4:**

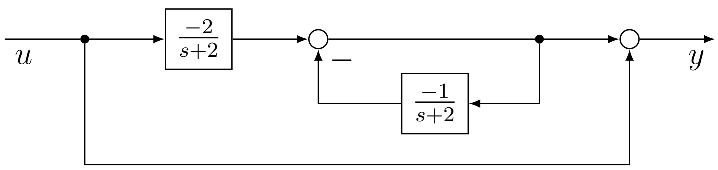
Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \end{bmatrix} u_k \tag{1}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$ und der Eingangsfolge $u_k$. Bestimmen Sie für konstantes $u_k = u_R\,\forall k$, $u_R \in \mathbb{R}$, alle Ruhelagen des Systems in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 5:**

Gegeben ist das folgende Übertragungssystem.




a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des Gesamtsystems. Geben Sie $G(s)$ ohne Doppel- bzw Mehrfachbrüche an.

b) Geben Sie eine Minimalrealisierung von $G(s)$ als Zustandsraummodell an.

c) Geben Sie eine Realisierung von $G(s)$ an, die weder steuerbar noch beobachtbar ist. Überprüfen Sie Ihr System auf beide Eigenschaften.

**Aufgabe 6:**

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \cos(u) \\ y &= x_1 x_2 u. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = \pi$ ist. Bestimmen Sie außerdem den Wert $y_R$ des Ausgangssignals in dieser Ruhelage.

b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T \Delta\mathbf{x} + d\Delta u \end{aligned}$$

an wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

**Aufgabe 7:**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und dem Eingangssignal $u(t)$.

a) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

b) Geben Sie die Formeln zur Berechnung der freien Lösung $\mathbf{x}_f(t)$ sowie der erzwungenen Lösung $\mathbf{x}_e(t)$ an.

c) Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 3$ sei gegeben mit $\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ und $u(t) = 0\,\forall t$. Ermitteln Sie den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$.

**Aufgabe 8:**

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u_k$, der Ausgangsgröße $y_k$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k - 2u_k. \end{aligned}$$

Führen Sie eine Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_k$ so durch, dass das transformierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k \\ y_k &= \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{z}_k + \tilde{d}u_k \end{aligned}$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.