Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 12.10.2023

Name / Vorname(n):

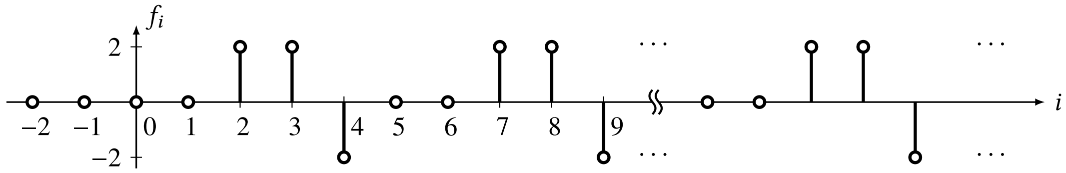
Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	3	2	2	3
erreichte Punkte				

Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch*!

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Folge (f) mit den Elementen f_i gemäß folgender Abbildung:



a) Ermitteln Sie die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ dieser Folge *mathematisch nachvollziehbar*.

b) Die z-Transformierte $\bar{g}(z)$ der Folge (g) sei gegeben durch

$$\bar{g}(z) = -3\,\frac{z^5 + z^4 - z^3}{z^5 - 1}\,.$$

Stellen Sie die Folge (g) graphisch dar. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 0\,,$$

mit den Anfangswerten $x(0) = 1$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 3$. Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ mithilfe der LAPLACE-Transformation.

Aufgabe 3:

Die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ einer Folge (f) sei gegeben durch

$$\bar{f}(z) = \frac{z\,(z+1)^2}{(-2z^2 + a_1 z + a_0)\,(z-1)} \qquad \text{mit} \qquad a_0 > 0,\ \ a_1 > 0\,.$$

a) Geben Sie *notwendige und hinreichende* Bedingungen für a_0 und a_1 an, so daß der Grenzwert $f_\infty = \lim\limits_{i\to\infty} f_i$ existiert.

b) Wählen Sie a_0 und a_1 so, daß $f_\infty = -4$ gilt. (*Hinweis:* Die Wahl ist nicht eindeutig.)

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die beiden LAPLACE-Transformierten

$$\bar{x}(s) = \frac{5}{s\,(s^2 + 4s + 5)} \qquad \text{und} \qquad \bar{y}(s) = \frac{10}{s\,(s^2 + 4s + 5)}\,\mathrm{e}^{-3s}\,.$$

Wie lauten die zugehörigen Originalfunktionen $x(t)$ und $y(t)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 15.12.2023

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	5	3	2
erreichte Punkte			

Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch*!

Aufgabe 1:

Gegeben seien die beiden gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = u\,,$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_2(0) = 0$ und der Eingangsfunktion $u(t) = \cos^2 t$.

a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierte der Eingangsgröße $\bar{u}(s)$.

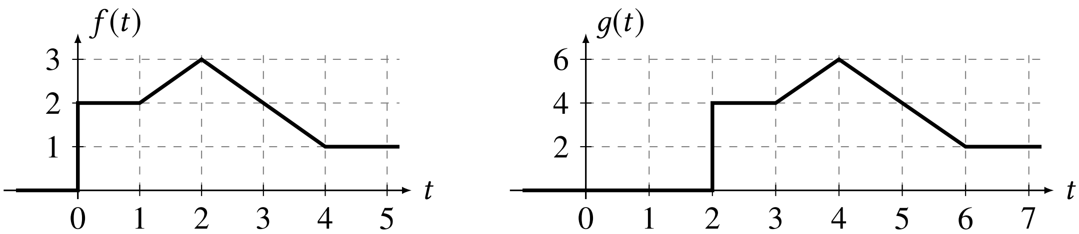
b) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t)$, sofern er existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

d) Ermitteln Sie mithilfe der LAPLACE-Transformation die Originalfunktion $x_1(t)$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die beiden grafisch gegebenen Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:



a) Ermitteln Sie *mathematisch nachvollziehbar* die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$.

b) Bestimmen Sie $\bar{g}(s)$ ausgehend von $\bar{f}(s)$; verwenden Sie dazu die Eigenschaften und Sätze der LAPLACE-Transformation.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die z-Transformierte $\bar{g}(z)$ der Folge (g):

$$\bar{g}(z) = \frac{z^2}{(-z^2 + z - \alpha)\,(z-1)\,(z+0{,}5)}\,,$$

mit der reellen Konstante α. Geben Sie *notwendige und hinreichende* Bedingungen für α an, so daß der Grenzwert $g_\infty := \lim\limits_{i\to\infty} g_i$ existiert und bestimmen Sie diesen.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 18.1.2024

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	3	4
erreichte Punkte			

Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch*!

Aufgabe 1:

Gegeben sei die z-Transformierte

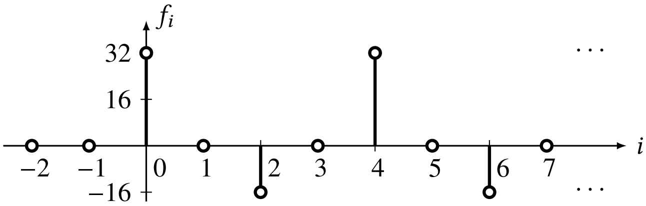
$$\bar{x}(z) = \frac{4z^2 - 2z - 1}{z^2 - z + 0{,}25} \cdot \frac{z}{z-1} \,.$$

a) Ermitteln Sie mithilfe von $\bar{x}(z)$ den Grenzwert $\lim\limits_{i \to \infty} x_i$ der zugehörigen Folge.

b) Berechnen Sie *mathematisch nachvollziehbar* die Elemente x_i der zugehörigen Folge.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Folge (f) mit den Elementen f_i gemäß folgender Abbildung:



a) Beweisen Sie, daß die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ gegeben ist durch

$$\bar{f}(z) = 16\,\frac{2z^4 - z^2}{z^4 - 1} \,.$$

b) Die z-Transformierte der Folge (g) lautet

$$\bar{g}(z) = \frac{-32\left(\frac{z}{0{,}5}\right)^4 + 16\left(\frac{z}{0{,}5}\right)^2}{\left(\frac{z}{0{,}5}\right)^4 - 1} \,.$$

Stellen Sie die ersten 6 Elemente der Folge graphisch dar.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + x_2 &= 2\cos t \\ x_1 + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 1$.

a) Ermitteln Sie *mathematisch nachvollziehbar* die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s), \bar{x}_2(s)$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Endwertsatzes der LAPLACE-Transformation den Grenzwert $\lim\limits_{t \to \infty} x_1(t)$, sofern er existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Ermitteln Sie nun die zugehörigen Originalfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 18.3.2024

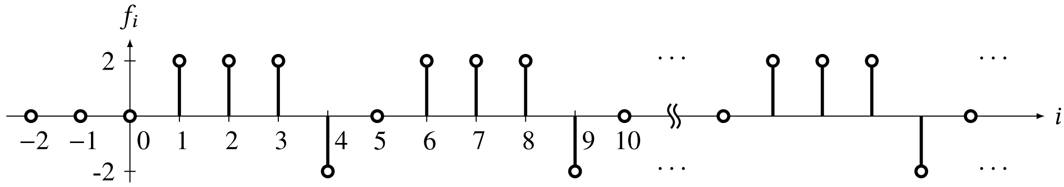
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	3	2	2	3	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Folge (f) mit den Elementen f_i gemäß folgender Abbildung:



a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die z-Transformierte obiger Folge $\bar{f}(z)$.

b) Die z-Transformierte $\bar{g}(z)$ der Folge (g) sei gegeben durch

$$\bar{g}(z) = 3\,\frac{z^5 + z^4 + z^3 - z^2}{z^5 - 1}\,.$$

Stellen Sie die Folge (g) graphisch dar. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2:

Gegeben sei die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ der Folge (f):

$$\bar{f}(z) = \frac{z}{(-2z^2 + a_1 z + a_0)(z-1)}\,,$$

mit den positiven Konstanten a_0 und a_1. Geben Sie *notwendige und hinreichende* Bedingungen für a_0 und a_1 an, so daß der Grenzwert $f_\infty := \lim\limits_{i\to\infty} f_i$ existiert und bestimmen Sie diesen.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3x + t\mathrm{e}^{-3t}\,, \qquad \text{mit dem Anfangswert } x(0) = x_0\,.$$

a) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Lösung $x(t)$.

b) Ermitteln Sie – sofern existent – den Grenzwert $x_\infty := \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

Aufgabe 4:

a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Originalfunktion $x(t)$ der Laplace-Transformierten

$$\bar{x}(s) = \frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)}\,.$$

b) Bestimmen Sie die stationäre Lösung $x_{\mathrm{st}}(t)$, sofern diese existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 8.5.2024

Nachname / Vorname(n):

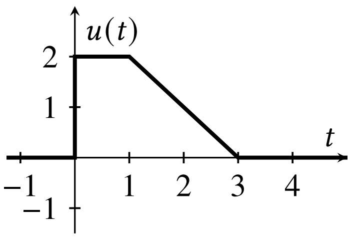
Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	2	2	4	2
erreichte Punkte				

Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch*!

Aufgabe 1:

Ermitteln Sie die Laplace-Transformierte $\bar{u}(s)$ der graphisch gegebenen Funktion $u(t)$:



Aufgabe 2:

Gegeben sei folgende Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$y_{i+2} + 2y_{i+1} + y_i = 0.$$

a) Berechnen Sie die z-Transformierte $\bar{y}(z)$ der Lösung y_i für allgemeine Anfangswerte y_0 und y_1.

b) Wie lautet die Folge (y_i) der Lösung für $y_0 = y_1 = 0$?

Aufgabe 3:

Gegeben seien die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} - x_2 = -2x_1$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + 2x_1 = u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0)$, $x_2(0)$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

a) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit der Anfangswerte $x_1(0)$ und $x_2(0)$ sowie der LAPLACE-Transformierten $\bar{u}(s)$.

b) Als Eingangsfunktion dient nun $u(t) = t\sigma(t)$ mit der Sprungfunktion $\sigma(t)$. Ermitteln Sie für $x_1(0) = x_2(0) = 0$ die Lösung $x_1(t)$ durch Anwendung der LAPLACE-Transformation.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie für die unten angegebenen LAPLACE-Transformierten $\bar{f}_1(s)$ und $\bar{f}_2(s)$ auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Grenzwerte der jeweiligen Originalfunktionen für $t \to \infty$, d.h. $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, falls diese existieren.

a) $\bar{f}_1(s) = \dfrac{1}{s^4 - 4s + 1}$

b) $\bar{f}_2(s) = \dfrac{s - 1}{s^3 + s - 2}$

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 1.7.2024

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	2	4	2	2
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ der Folge (f):

$$\bar{f}(z) = \frac{z^2 + 0{,}5z - 0{,}5}{(-2z^2 - a_1 z - a_0)(z+1)}\,,$$

mit den Konstanten $a_0 > 0$ und $a_1 > 0$. Geben Sie *notwendige und hinreichende* Bedingungen für a_0 und a_1 an, so daß der Grenzwert $f_\infty := \lim\limits_{i\to\infty} f_i$ existiert und bestimmen Sie diesen.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + x_1 = 2x_2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + x_2 = -2x_1 + u\,,$$

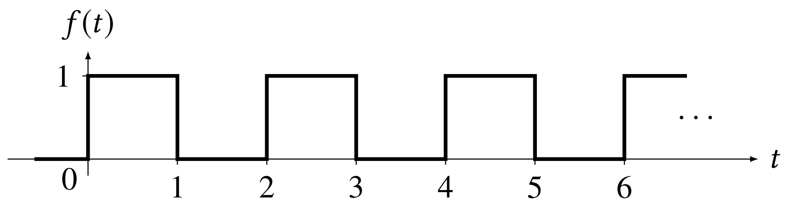
mit den Anfangswerten $x_1(0)$, $x_2(0)$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

a) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit von $x_1(0)$, $x_2(0)$ und $\bar{u}(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, u(t)$.

b) Es sei nun $u(t) = K\sigma(t)$ mit der reellen Konstante K und der Sprungfunktion $\sigma(t)$. Wählen Sie K durch Anwendung des Endwertsatzes so, daß $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 1$ gilt. Begründen Sie, warum der Grenzwert existiert!

c) Ermitteln Sie für $x_1(0) = -0{,}5$, $x_2(0) = 0$ die Lösung $x_2(t)$ durch Anwendung der LAPLACE-Transformation.

Aufgabe 3:



Zeigen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise*, daß die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$ der oben dargestellten Funktion $f(t)$ durch

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}}$$

gegeben ist. Ermitteln Sie weiters die LAPLACE-Transformierte von $g(t) = 2f(t-2)\sigma(t-2)$.

Aufgabe 4:

Ermitteln Sie die z-Transformierte $\bar{x}(z)$ der Folge (x), deren Folgenelemente folgender Differenzengleichung genügen:

$$x_{i+2} = u_i\,, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

mit $u_i = 3ia^i$, $a \neq 0$. Ermitteln Sie x_i mit Hilfe der z-Transformation für $x_0 = x_1 = 0$.