Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 12.10.2018

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	2	4
erreichte Punkte			

AUFGABE 1

Betrachten Sie die lineare Rekursionsgleichung

$$x_{i+2} + x_{i+1} - 2x_i = u_i \quad (i = 0,1,2,\ldots)$$

mit den Anfangswerten x_0 *und* x_1 sowie $u_i = K(0.5 + i)3^{-i}$. Hierbei ist K eine Konstante.
Ermitteln Sie in ***mathematisch nachvollziehbarer Weise***

a) die z-Transformierte $\bar{u}(z)$,
b) die z-Transformierte $\bar{x}(z)$,
c) die Lösung x_i ausgehend von der z-Transformierten $\bar{x}(z)$ für die Werte $K = 0$, $x_0 = 1$ und $x_1 = 0$.

AUFGABE 2

Gegeben sei die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ einer Folge (f) mit den Elementen f_i:

$$\bar{f}(z) = \frac{z}{[2z^2 + az + b][z^2 - 1.5z + 0.5]}$$

Hierbei sind a und b reelle Konstanten.

Ermitteln Sie in ***mathematisch nachvollziehbarer Weise*** notwendige und hinreichende Bedingungen für a und b, damit der Grenzwert $f_\infty := \lim_{i\to\infty} f_i$ existiert und berechnen Sie diesen.

AUFGABE 3

Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = 3x + u$$

mit dem Anfangswert $x(t = 0) = x_0$ und der Eingangsfunktion $u(t) = \sigma(t-1)(t-1)e^{-2(t-1)}$.
Hierbei wird mit $\sigma(t)$ die Sprungfunktion symbolisiert.

Ermitteln Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation in ***mathematisch nachvollziehbarer Weise***

a) die Laplace-Transformierte $\bar{x}(s)$ der Lösung $x(t)$,
b) die Lösung $x(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 18.12.2018

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	3	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie für die unten angegebenen LAPLACE-Transformierten $\bar{f}_1(s)$, $\bar{f}_2(s)$ und $\bar{f}_3(s)$ auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Grenzwerte der jeweiligen Originalfunktionen für $t \to \infty$, d. i. $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, falls diese existieren.

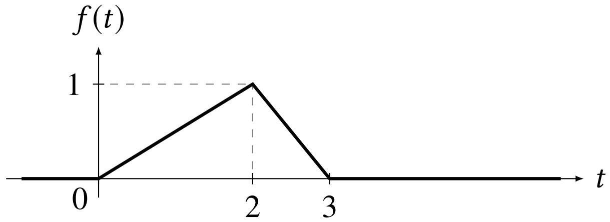
a) $\bar{f}_1(s) = \dfrac{s-2}{s^3 - 2s - 4}\,.$

b) $\bar{f}_2(s) = \dfrac{1}{s^4 - 3s + 1}\,.$

c) $\bar{f}_3(s) = \dfrac{1}{-s^3 - 2s^2 - s}\,.$

Aufgabe 2:

Die Funktion $f(t)$ hat nachfolgenden Verlauf:



Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$ der Funktion $f(t)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$x_{i+1} + a x_i = u_i\,, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $u_i = \sigma_i + b^i$. Hierbei bezeichnet σ_i die diskrete Sprungfunktion; a und b sind reelle Konstanten. Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise*

a) die z-Transformierte $\tilde{u}(z)$ der Eingangsfolge (u) mit den Elementen u_i,

b) die z-Transformierte $\tilde{x}(z)$ der Folge (x) mit den Elementen x_i.

Es sei nun $b = 1$ und $x_0 = 0$.

c) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Lösung x_i unter Anwendung der z-Transformation.

d) Geben Sie *notwendige und hinreichende* Bedingungen für a an, sodass der Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$ existiert und berechnen Sie diesen.

Schriftliche Prüfung in **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 16.1.2019

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

---

1. Aufgabe 6 Pkte:

2. Aufgabe 4 Pkte

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0)$, $x_2(0)$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

- Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit der Anfangswerte $x_1(0)$ und $x_2(0)$ und der LAPLACE-Transformierten $\bar{u}(s)$.
- Als Eingangsfunktion $u(t)$ dient jeweils eine der folgenden zwei Funktionen:

  I: $u_I(t) = \sin^2 t \quad$ für $t \geq 0$

  II: $u_{II}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 3 \\ 1{,}5 - 1{,}5\cos^2(t-3) & \text{für } t \geq 3 \end{cases}$

  Die Anfangswerte betragen nun $x_1(0) = x_2(0) = 0$.
  Ermitteln Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* für jeden Fall die zugehörige Lösung $x_2(t)$.

  Bestimmen Sie für beide Fälle - falls diese jeweils existiert - die *stationäre* Lösung $x_{2,stat.}(t)$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie zwei Folgen (f) bzw. (h) mit den zugehörigen z-Transformierten

$$\bar{f}(z) = \frac{1+z^7}{z^8+z^9} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{h}(z) = \bar{f}(-z).$$

- Berechnen Sie durch Anwendung des Endwertsatzes der z-Transformation die Grenzwerte $f_\infty := \lim\limits_{i\to\infty} f_i$ und $h_\infty := \lim\limits_{i\to\infty} h_i$, *falls* diese existieren. *Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch!*
- Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Originalfolgen (f) und (h).
- Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die z-Transformierte der Folge $(g) := (h) - (f)$ mit den Elementen $g_i := h_i - f_i$.
- Skizzieren Sie die Folge (g) für $0 \leq i \leq 11$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 15.03.2019

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	3	3	2	2	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die lineare Rekursionsgleichung

$$f_{i+1} = f_i + a f_{i-1} \qquad \text{mit} \qquad f_i = 0 \quad \text{für} \quad i < 0$$

und dem Anfangswert f_0. Welches mathematische Werkzeug wurde in der Vorlesung behandelt, um solche Rekursionsgleichungen aufzulösen und explizit darzustellen?

b) Wenden Sie dieses Werkzeug auf obige Rekursionsgleichung an, um den Wert f_5 auf *mathematische nachvollziehbare Weise* zu bestimmen; es sei $a = 2$ und $f_0 = 3$.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} f_i$, falls dieser existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierte $\bar{x}(s)$ der Integral-Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax - b\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\,,$$

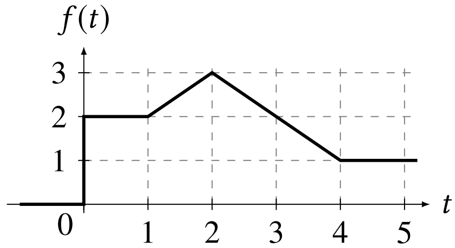
in Abhängigkeit des Anfangszustandes x_0.

b) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Zeitfunktion $x(t)$ für $a = 0$ und $b = -4$ in Abhängigkeit des Anfangszustandes x_0.

c) Ermitteln Sie die stationäre Lösung $x_{\mathrm{stat}}(t)$ und den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, falls diese jeweils existieren. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

Aufgabe 3:

Die Funktion $f(t)$ habe nachfolgenden Verlauf:



Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$ der Funktion $f(t)$.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* jeweils die LAPLACE-Transformierte von

a) $f(t) = \sin^2(3t)$ und b) $g(t) = \sin(3t)\cdot\cos(3t)\,.$

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 17. 5. 2019

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die lineare Rekursionsgleichung

$$x_{i+1} - 3x_i + u_i = 0 \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert x_0 und $u_i = 1 - \cos^2\left(i\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die z-Transformierte $X(z)$.
b) Ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation für $x_0 = 0$ die Lösung x_i.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes System von linearen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 4x_2 + u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ und $u(t) = e^{-5t}$.

a) Bestimmen Sie die zugehörigen LAPLACE-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
b) Berechnen Sie im *Bildbereich* den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$, sofern dieser existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!
c) Ermitteln Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Originalfunktion $x_1(t)$.

Aufgabe 3:

Ermitteln Sie für die vorgegebenen z-Transformierten $F(z)$ und $G(z)$ in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise jeweils den Grenzwert der Originalfunktion

$$\lim_{i\to\infty} f_i \quad \text{und} \quad \lim_{i\to\infty} g_i,$$

falls dieser existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

I. $$F(z) = 2 + \frac{3z+3}{(z^2+0.5z-0.5)(z+0.5)}$$

II. $$G(z) = 1 - \frac{2.5z^2}{(z^2+1.5z+0.5)(z+0.3)}$$

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 2.7.2019

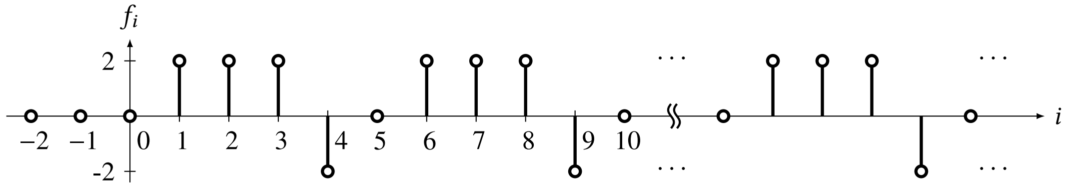
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	3	2	2	3	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Folge (f) mit den Elementen f_i gemäß folgender Abbildung:



a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die z-Transformierte obiger Folge $\bar{f}(z)$.

b) Die z-Transformierte $\bar{g}(z)$ der Folge (g) sei gegeben durch

$$\bar{g}(z) = 3\,\frac{z^5 + z^4 + z^3 - z^2}{z^5 - 1}\,.$$

Stellen Sie die Folge (g) graphisch dar. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2:

Gegeben sei die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ der Folge (f):

$$\bar{f}(z) = \frac{z}{(-2z^2 + a_1 z + a_0)(z-1)}\,,$$

mit den positiven Konstanten a_0 und a_1. Geben Sie *notwendige und hinreichende* Bedingungen für a_0 und a_1 an, so daß der Grenzwert $f_\infty := \lim\limits_{i\to\infty} f_i$ existiert und bestimmen Sie diesen.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3x + t\mathrm{e}^{-3t}\,, \qquad \text{mit dem Anfangswert } x(0) = x_0\,.$$

a) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Lösung $x(t)$.

b) Ermitteln Sie – sofern existent – den Grenzwert $x_\infty := \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

Aufgabe 4:

a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Originalfunktion $x(t)$ der Laplace-Transformierten

$$\bar{x}(s) = \frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)}\,.$$

b) Bestimmen Sie die stationäre Lösung $x_{\mathrm{st}}(t)$, sofern diese existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!