Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 12. 10. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	3	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:
Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u(t)$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ und der Eingangsgröße $u(t) = \sin^2(t)$.

a) Bestimmen Sie die LAPLACE - Transformierte der Eingangsgröße $U(s)$.

b) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE - Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

c) Ermitteln Sie die Originalfunktion $x_1(t)$.

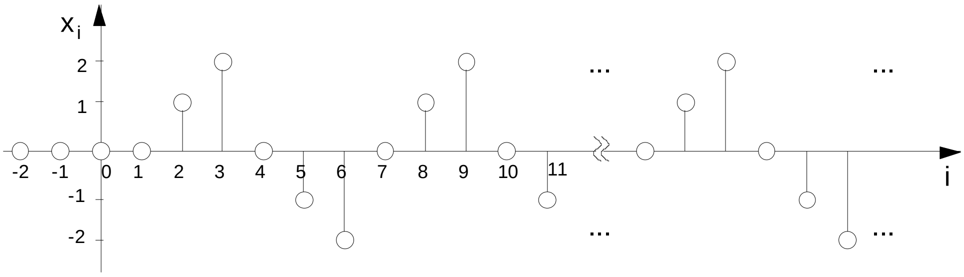
Aufgabe 2:
Gegeben sei die LAPLACE – Transformierte einer Funktion $f(t)$

$$F(s) = \frac{5s}{s^2 - 4s + 8}.$$

a) Geben Sie eine *mathematische Begründung* an, warum in diesem Fall der *Grenzwertsatz der LAPLACE-Transformation* zur Berechnung des Grenzwertes $\lim_{t\to\infty} f(t)$ <u>nicht</u> angewendet werden darf.

b) Ermitteln Sie die zugehörige Originalfunktion $f(t)$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei das zeitdiskrete Signal x_i gemäß folgender Abbildung:



Zeigen Sie dass für die zugehörige z-Transformierte des Signals

$$X(z) = \frac{z+2}{z^3+1} \text{ gilt.}$$

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 07. 12. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	5	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:
Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die LAPLACE-Transformierte der Funktion

$$f(t) = t^2 \cos(\omega t) \qquad (\omega > 0)$$

durch

$$F(s) = \frac{2s^3 - 6\omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)^3}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die rekursive Relation

$$x_{i+1} = \alpha x_i + \beta u_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

deren reelle Parameter α und β leider verloren gegangen sind. Dafür ist jedoch bekannt, dass für

$$x_0 = 0 \text{ und } u_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

die z-Transformierte der Folge x_i durch

$$X(z) = \frac{24z}{6z^2 - 5z + 1}$$

gegeben ist.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der z-Transformation die Folge x_i für obige Werte von x_0 und u_i.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} x_i$ mit Hilfe der z-Transformation. Begründen Sie, warum der Grenzwertsatz anwendbar ist.

c) Ermitteln Sie die Parameter α und β.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die z-Transformierte

$$F(z) = \frac{z+2}{z^{31} + z^{30}}$$

Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die Originalfolge f_i.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 25.01.2013

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	4	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass die LAPLACE-Transformierte der Funktion

$$f(t) = e^{-3t}(6t^2 + 6t - 1)$$

durch

$$F(s) = \frac{21 - s^2}{9 + 6s + s^2}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2:

Die Folge (x_i) ergibt sich aus den Folgen (g_i) und (u_i) über die Beziehung

$$x_i = \sum_{k=1}^{i} g_k u_{i-k} \, , \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

wobei die z-Transformierte von (g_i) durch

$$G(z) = \frac{4}{2z - 1}$$

gegeben ist.

a) Ermitteln Sie eine rekursive Relation der Form

$$x_{i+1} = \alpha x_i + \beta u_i$$

welche von (x_i) erfüllt wird.

b) Ermitteln Sie x_i mit Hilfe der z-Transformation für die Eingangsfolge

$$u_i = \left(\frac{1}{4}\right)^i .$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x + u$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ und der Eingangsfunktion

$$u(t) = e^{-3t} .$$

a) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $X(s)$.
b) Berechnen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation den Grenzwert $x_\infty = \lim_{t \to \infty} x(t)$, sofern er existiert. (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)
c) Bestimmen Sie die Originalfunktion $x(t)$ mit Hilfe der LAPLACE-Transformation.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 15.03.2013

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	3	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die LAPLACE – Transformierte

$$F(s) = \frac{6s \cdot e^{-2s} + 3}{s^2 + 5s + 4}.$$

Ermitteln Sie *in mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige Originalfunktion $f(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - 2u$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 1$ und der Eingangsfunktion $u = e^{\alpha t}$. Hierbei ist α ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $X(s)$.
b) Ermitteln Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Lösung $x(t)$.
c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation den Parameter α so, dass bei Vorgabe eines Einheitssprungs $u = \sigma(t)$ für den Grenzwert $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t)$

$$|x_\infty| = 1$$

gilt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die rekursive Relation

$$x_{i+1} = 0.25 x_i + 0.5 u_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

mit unbekannter Eingangsfolge (u_i). Bekannt ist jedoch, dass die Folge (x_i) durch

$$x_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ (0.5)^i & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

gegeben ist.

a) Ermitteln Sie die z-Transformierte $X(z)$ von (x_i).
b) Bestimmen Sie $U(z)$ und davon ausgehend die Folge (u_i).
c) Stellen Sie die Folgen (x_i) und (u_i) graphisch dar.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 08.07.2013

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

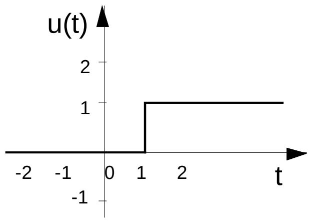
Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 2x_2$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Die Eingangsgröße $u(t)$ liegt in graphischer Form vor:



a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
b) Kann im vorliegenden Fall der *Grenzwertsatz* der LAPLACE-Transformation zur Bestimmung von $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ angewendet werden? Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!
c) Ermitteln Sie die zugehörigen Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Aufgabe 2:

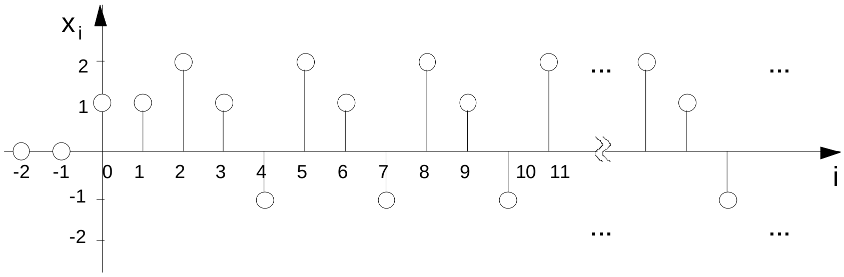
Gegeben sei die z-Transformierte

$$F(z) = \frac{z^4 + 0.25z^2 + z}{(z^2 - z + 0.25)(z^2 + 1)}.$$

Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die zugehörige Originalfolge (f_i) mit $i = 0,1,2,\ldots$

Aufgabe 3:

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal x_i gemäß folgender Abbildung:



Zeigen Sie, dass für die zugehörige z-Transformierte des Signals gilt:

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{2z^2 + z - 1}{z^4 - z}$$