Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 12. 10. 2007

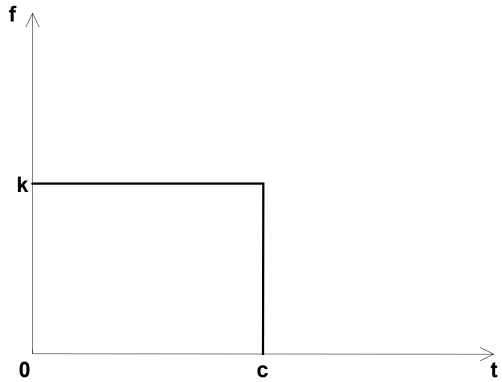
Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	4	4	4	4	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei die in nachfolgender Abbildung dargestellte Funktion $f(t)$.



Ermitteln Sie die zugehörige LAPLACE - Transformierte $F(s)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} + x_2 = 2\cos t$$
$$x_1 + \frac{dx_2}{dt} = 0$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 1$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE – Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

b) Ermitteln Sie die zugehörigen Originalfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Aufgabe 3:

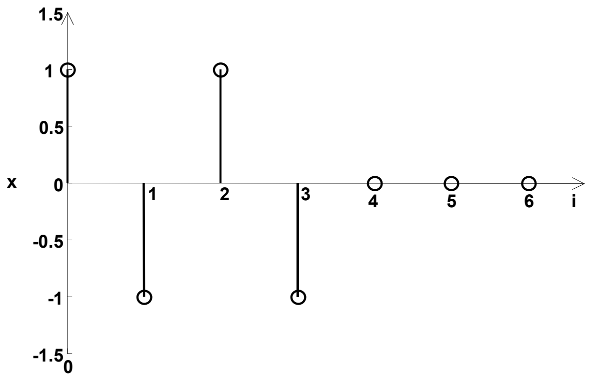
Gegeben sei die z - Transformierte

$$F(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-2)}.$$

Ermitteln Sie die zugehörige Originalfolge f_i.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das diskrete Signal x_i gemäß nachfolgender Abbildung:



mit $x_i = 0$ für $i > 3$.

Zeigen Sie, dass

$$X(z) = \frac{z - z^{-3}}{z+1}$$

die z – Transformierte der Folge x_i ist.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 14. 12. 2007

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	2	4	4	2	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = t^2 e^{-3t} .$$

Ermitteln Sie in mathematisch nachvollziehbarer Weise die zugehörige LAPLACE – Transformierte $F(s)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + u$$

mit $u(t) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ und dem Anfangswert $x(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie in mathematisch nachvollziehbarer Weise durch Anwendung der LAPLACE – Transformation die Funktion $X(s)$.

b) Ermitteln Sie die zugehörige Originalfunktion $x(t)$.

c) Ermitteln Sie die stationäre Lösung $x_{stat} := \lim_{t\to\infty} x(t)$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die z-Transformierte:

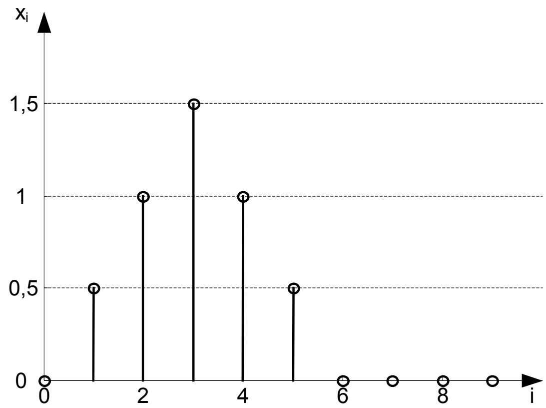
$$F(z) = \frac{0{,}6z}{z^2 - 1{,}7z + 0{,}7} .$$

a) Ermitteln Sie in mathematisch nachvollziehbarer Weise die Originalfolge f_i.

b) Bestimmen Sie die Werte f_0 und f_∞.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das diskrete Signal x_i gemäß nachfolgender Abbildung:



mit $x_i = 0$ für $i > 5$.

Zeigen Sie in nachvollziehbarer Weise, dass

$$X(z) = 0{,}5 z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2})^2$$

die z – Transformierte der Folge x_i ist.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 16. 05. 2008

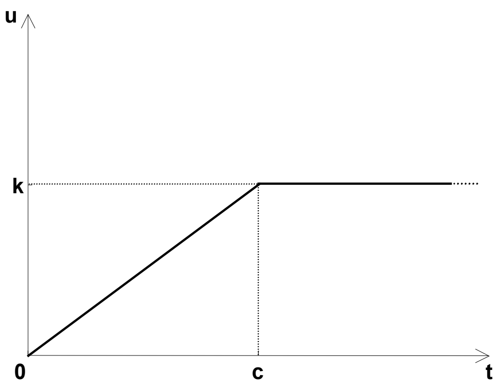
Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	5	4
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Gegeben sei die in nachfolgender Abbildung dargestellte Funktion $u(t)$.



Die Funktion $u(t)$ lässt sich in der Form

$$u(t) = a_1 t\sigma(t) + a_2(t-a_3)\sigma(t-a_3)$$

angeben. Hierbei symbolisieren wir mit $\sigma(t)$ die Einheitssprungfunktion.

a) Ermitteln Sie die Parameter a_i ($i=1,2,3$) der Funktion $u(t)$ aus obigem graphischen Verlauf.

b) Zeigen Sie, dass für die LAPLACE - Transformierte $U(s)$ gilt

$$U(s) = \frac{k}{cs^2}\left(1-e^{-cs}\right).$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der LAPLACE Transformation die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x + u$$

mit dem Anfangswert $x(0)=0$ und der Funktion $u(t)$ gemäß obiger Abbildung.

Hinweis: $L\{f(t-a)\sigma(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die z - Transformierte

$$F(z) = \frac{z(z+2)}{z^2+z-2}.$$

a) Ermitteln Sie die zugehörige Originalfolge f_i ($f_i = 0$ für $i<0$).

b) Betrachten Sie die Folgen $h_i := f_{i-1}$ und $g_i := f_{i+1}$. Skizzieren Sie f_i, g_i und h_i.

c) Wie lauten die z-Transformierten der Folgen g_i und h_i?

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 25. 01. 2008

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	4	3
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + x + \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

mit dem Anfangswert $x(t=0) = x_0$.

b) Zeigen Sie, dass für hinreichend große Werte des Parameters t die Lösung $x(t)$ durch die Funktion

$$x_{st}(t) := \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$$

gegeben ist.

c) Wählen Sie den Anfangswert x_0 derart, dass

$$x(t) = x_{st}(t)$$

für <u>alle</u> Werte von $t \geq 0$ gilt.

Aufgabe 2:

a) Ermitteln Sie die z-Transformierte $F(z)$ von

$$f_i = \sin(i\omega T_d) \qquad i = 0,1,2,...$$

mit ω und T_d konstant.

b) Zeigen Sie, dass die z-Transformierte für $\omega T_d = \frac{\pi}{2}$ durch

$$F(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

gegeben ist.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 14. 3. 2008

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	3	4
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + u\,.$$

Ermitteln Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Lösung $x(t)$

a) für $x(0) = 5$ und $u(t) = 8t$.

b) für $x(0) = 5$ und $u(t) = 8$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$x_{i+2} + (a+b)x_{i+1} + abx_i = 0 \qquad i = 0,1,2,...$$

mit den Anfangswerten x_0 und x_1.
Hierbei sind a und b zwei reelle Konstanten.

Ermitteln Sie mit Hilfe der z-Transformation die Lösung x_i für die beiden Fälle

a) $a \neq b$ und

b) $a = b$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 8.7.2008

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	5	5
erreichte Punkte			

Aufgabe1:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \cos^2(2t)$$

Zeigen Sie, dass

$$F(s) = \frac{s^2+8}{s^3+16s}$$

die zugehörige Laplace-Transformierte ist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$x_{i+1} = 0.5x_i + u_i$$

mit dem Anfangszustand

$$x_0 = 0$$

und

$$u_i = a^{i+1}.$$

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der z-Transformation die Funktion $X(z)$.

b) Ermitteln Sie den Grenzwert $x_\infty = \lim_{i\to\infty} x_i$ in Abhängigkeit des positiven, reellen Parameters a.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -3x + u$$

mit dem Anfangszustand

$$x_0 := x(0) = 1$$

und

$$u(t) = Ke^{\gamma t}.$$

Hierbei sind K und γ reelle, konstante Parameter.
Zeigen Sie, dass von den fünf nachfolgend angegebenen Funktionen $x(t)$ nur drei als Lösungen möglich sind. Ermitteln Sie die zugehörigen Parameter K und γ.

a) $x(t) = e^{-3t}$

b) $x(t) = e^{-3t} + 2e^{-5t}$

c) $x(t) = -e^{-3t} + 2e^{t}$

d) $x(t) = e^{-3t} + te^{-5t}$

e) $x(t) = e^{-3t} + te^{-3t}$