Schriftliche Prüfung aus **Nichtlineare elektrische Systeme**
Teil: Dourdoumas
am 20.10.2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl/ Matrikel-Nummer.:

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	2	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes nichtlineare System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^3 + y^2 - 2y + 1 = u$$

a) Führen Sie die Zustandsvariablen $x_1 = y$ und $x_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ein und geben Sie das entsprechende Modell der Form $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$ an.

b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems in Abhängigkeit der Eingangsgröße $u(t) \equiv u_R$.

c) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{b}v \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\zeta}, & \boldsymbol{\zeta}^T = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix} \\ u = u_R + v & \end{matrix},$$

welche das Verhalten des nichtlinearen Systems für „*kleine Auslenkungen*" $\boldsymbol{\zeta}$ und v aus den jeweiligen Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

d) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen des *nichtlinearen* Systems für den Fall $u_R = \frac{1}{4}$. (Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch.)

Aufgabe 2:

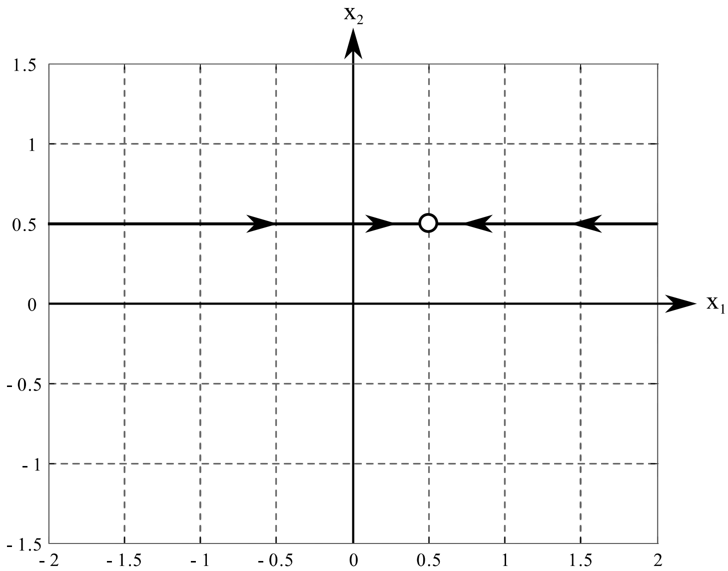
Beurteilen Sie die Linearität folgender Systeme mit der (reellen) Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an.

a) $y(u) = e^{ju} - \cos u - j \sin u \quad \text{mit} \quad j^2 = -1,$

b) $y(u) = \sqrt{u^2}$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes Trajektorienbild eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:



a) Bestimmen Sie mögliche Eigenvektoren $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$. Was können Sie über die zugehörigen Eigenwerte s_1 bzw. s_2 aussagen?

b) Berechnen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit der Eigenwerte s_1 und s_2.

c) Ermitteln Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x_R}$ des obigen Systems.

d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$- Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein)

Schriftliche Prüfung aus **Nichtlineare elektrische Systeme**
Teil: Dourdoumas
am 03. 02. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	6	8
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Ein lineares und zeitinvariantes System 2. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

besitzt die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{x}_0$$

mit dem Anfangswert

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t=0)\,.$$

Die sogenannte Transitionsmatrix lautet

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

b) Ist obiges System stabil, asymptotisch stabil oder instabil? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

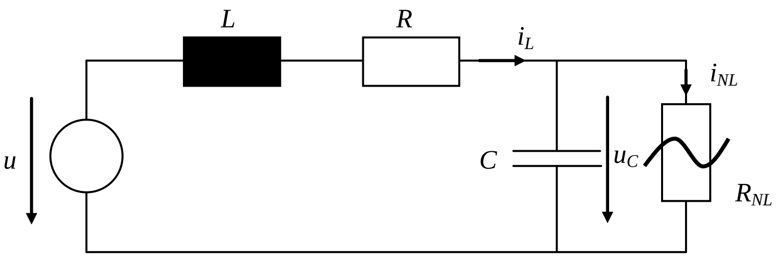
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der x_1, x_2 − Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{0,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_{0,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das folgende ideale elektrische Netzwerk, bestehend aus einer Spannungsquelle, einem ohmschen Widerstand R, einer Kapazität C, einer Induktivität L und einem nichtlinearen Widerstand R_{NL} (siehe Skizze).



Die Kennlinie des nichtlinearen Widerstands R_{NL} wird durch

$$i_{NL} = -ku_C^2$$

beschrieben. Hierbei ist i_{NL} der Strom durch den Widerstand R_{NL} und u_C ist die Spannung an der Kapazität C. Mit i_L bezeichnen wir den Strom durch die Induktivität L.

a) Führen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T = [i_L \quad u_C]^T$ ein ermitteln Sie ein Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u).$$

b) Für die Bauteilwerte gelte nun $R = 1\Omega$, $L = 1\mathrm{H}$, $C = 1\mathrm{F}$ und $k = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}^2}$. Bestimmen Sie für die konstante Eingangsgröße $u = u_0 = -8V$ *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des sich ergebenden Systems

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 + u \\ x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 \end{bmatrix}.$$

c) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}\,\nu$$

mit $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}\mathbf{x}_R +$ und $u = u_0 + \nu$,

die das Systemverhalten für „kleine Auslenkungen“ $\boldsymbol{\xi}$ und ν aus den ermittelten Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

d) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter aller Ruhelagen des *nichtlinearen* Systems. Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch.