Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 25.06.2024

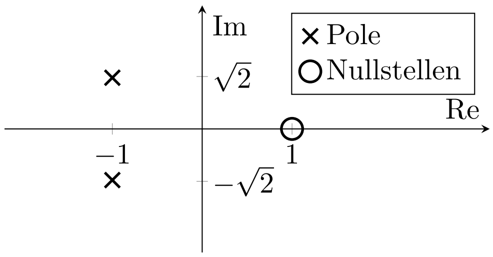
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

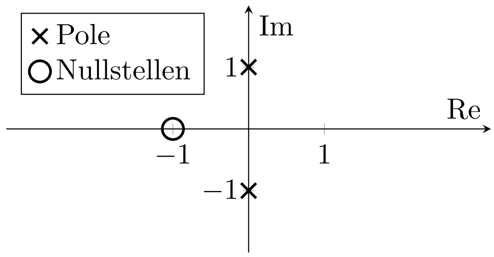
Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Summe
erreichbare Punkte	3	2	2	2	3	3	3	18
erreichte Punkte								

Aufgabe 1:

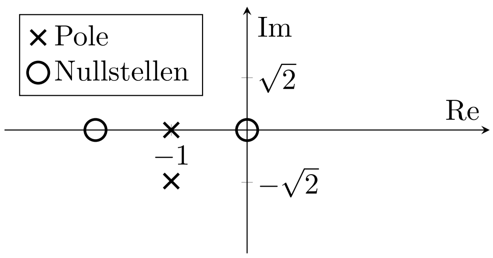
Folgende PN-Pläne sind gegeben:



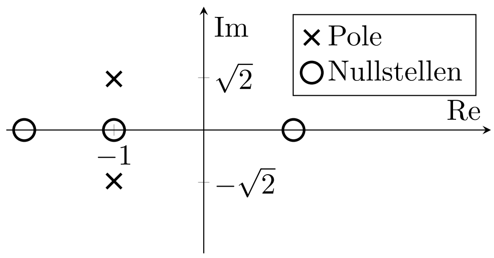
i) PN-Plan 1



ii) PN-Plan 2



iii) PN-Plan 3



iv) PN-Plan 4

a) Welcher PN-Plan kann zu einer BIBO-stabilen Übertragungsfunktion $G(s)$ gehören? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ für den gewählten PN-Plan wenn bekannt ist, dass die Ausgangsgröße $y(t)$ für die Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$ (d.h. für einen Einheitssprung) die Relation

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{4}{3}$$

erfüllt.

c) Ermitteln Sie $y(t)$ im *eingeschwungenen Zustand* für $u(t) = 5\cos(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Übertragungsfunktionen zweier linearer zeitinvarianter Systeme

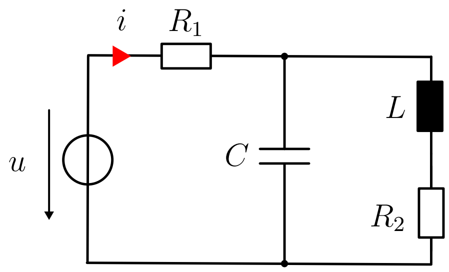
$$\text{i) } G_1(s) = \frac{2s-2}{s^3+3s^2+(k^2+2k+2)s-k^2+2k},$$

$$\text{ii) } G_2(s) = \frac{k(s+3)}{(s^2+5s)(2s+2k+3)}.$$

Ermitteln Sie jeweils den *größtmöglichen Wertebereich* des reellen Parameters k, für den die einzelnen Übertragungsfunktionen BIBO-stabil sind.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes ideales elektrisches Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Kapazität C, der Induktivität L und den Widerständen R_1 und R_2. Die Spannung der Spannungsquelle wird mit u symbolisiert, mit i wird der Strom durch den Widerstand R_1 bezeichnet.



a) Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße $y = i$ auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.\end{aligned}$$

b) Zeichnen Sie das Strukturbild des gegebenen Systems.

Aufgabe 4:

Eine Transitionsmatrix eines linearen zeitinvarianten Systems der Form

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,\\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x},\end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y ist

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

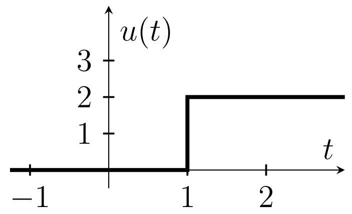
a) Untersuchen Sie nachvollziehbar, für welche Werte der reellen Konstante α dieses System asymptotisch stabil ist.

b) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und den Wert für α.

c) Ermitteln Sie für den in Punkt b) gefunden Wert von α den exakten zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ für

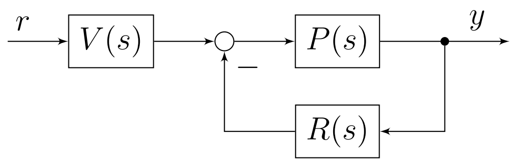
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und der folgenden Eingangsgröße $u(t)$:



Aufgabe 5:

Gegeben sei folgender Regelkreis mit der Führungsgröße r, der Stellgröße u und der Ausgangsgröße y:



Die Übertragungsfunktion der Regelstrecke lautet

$$P(s) = \frac{(s-1)}{s^2 - 5s + 6}.$$

a) Untersuchen Sie folgende Führungsübertragungsfunktionen $T(s)$ auf Implementierbarkeit für die gegebene Streckenübertragungsfunktion $P(s)$:

$$\text{(i)} \quad T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \qquad \text{(ii)} \quad T(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)^2}$$

$$\text{(iii)} \quad T(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} \qquad \text{(iv)} \quad T(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2(s+2)}$$

b) Wählen Sie die einzig mögliche implementierbare Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ aus Aufgabe a) aus und dimensionieren Sie die beiden Übertragungsfunktionen

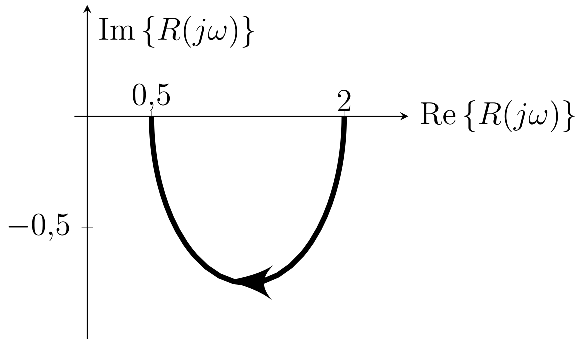
$$R(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, \qquad V(s) = \frac{c(s)}{a(s)}.$$

Aufgabe 6:

Zum Reglerentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren wurde als Reglerübertragungsfunktion $R(s)$ ein Lead/Lag-Glied mit dem Verstärkungsfaktor K gewählt. Die Ortskurve der entsprechenden Reglerübertragungsfunktion

$$R(s) = K \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_Z}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_N}\right)}$$

ist dabei wie folgt gegeben:



a) Ermitteln Sie aus der oben dargestellten Ortskurve, ob ein Lead-Glied oder ein Lag-Glied verwendet wird und ermitteln Sie den reellen Verstärkungsfaktor K.

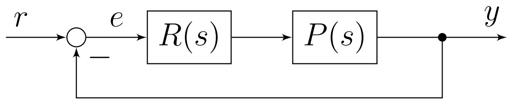
b) Ermitteln Sie die Parameter des Lead/Lag-Gliedes wenn die maximale Phasenanhebung/Phasenabsenkung bei $\omega_m = 4\ \frac{rad}{s}$ liegt.

c) Ermitteln Sie, für eine Abtastzeit $T_d = 1$ eine zeitdiskrete Approximation $R_\mathrm{d}(z)$ der Reglerübertragungsfunktion $R(s)$ basierend auf einer Vorwärts-Euler-Diskretisierung. Geben Sie das zugehörige Regelgesetz zur Ermittlung der Stellfolge (u_k) aus der Regelfehlerfolge (e_k) in Form einer Differenzengleichung an.

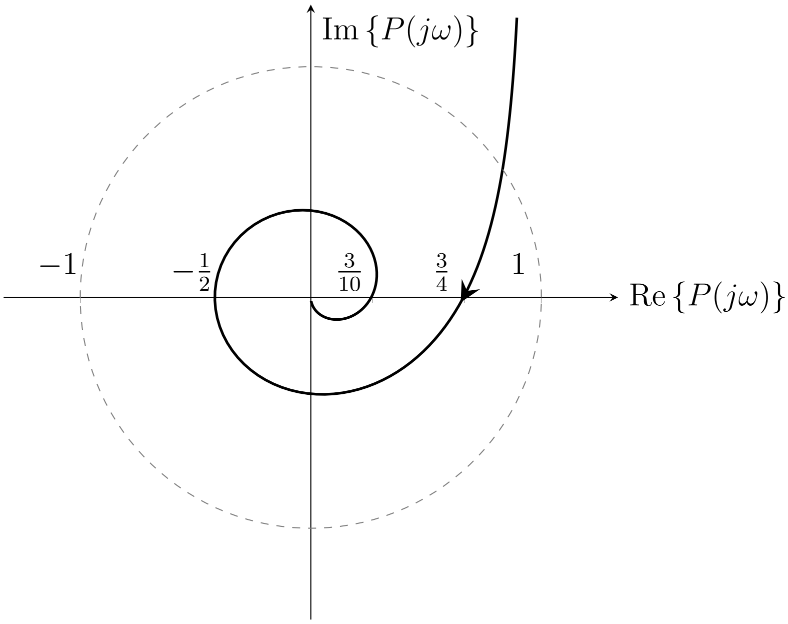
Bitte wenden!

Aufgabe 7:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild eines Regelkreises mit der Führungsgröße r, der Regelabweichung e und der Ausgangsgröße y:



Von der Streckenübertragungsfunktion $P(s)$ ist bekannt, dass genau 3 ihrer 4 Pole einen negativen Realteil aufweisen, 1 Pol auf der imaginären Achse liegt und dass der Verstärkungsfaktor negativ ist ($V < 0$). Zudem liegt die Ortskurve des Frequenzgangs $P(j\omega)$ für $0 \leq \omega < \infty$ graphisch vor:



a) Als Regler wird ein Proportionalregler $R(s) = K$ mit dem reellen Parameter K eingesetzt. Bestimmen Sie mit Hilfe des NYQUIST-Kriteriums nachvollziehbar, d.h. mit Ermittlung der stetigen Winkeländerung, für welche der beiden folgenden Werte

i) $K = 4$, ii) $K = -1$

obiger Regelkreis die BIBO-Eigenschaft besitzt.

b) Ist es möglich, für das von Ihnen gewählte K die Phasenreserve Φ_r sowie den Amplitudenrand A_r von der Ortskurve abzulesen? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*) Wenn ja, skizzieren Sie die Ortskurve von $L(j\omega) = R(j\omega)P(j\omega)$ für Ihr gewähltes K und zeichnen Sie die beiden Größen in die Ortskurve ein.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 08.10.2024

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	2	2	2	2	2	3	3	19
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} -8 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

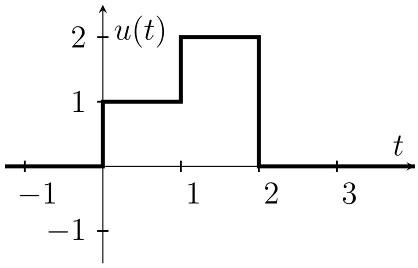
mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Systems.

b) Ist das System BIBO-stabil?

c) Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems.

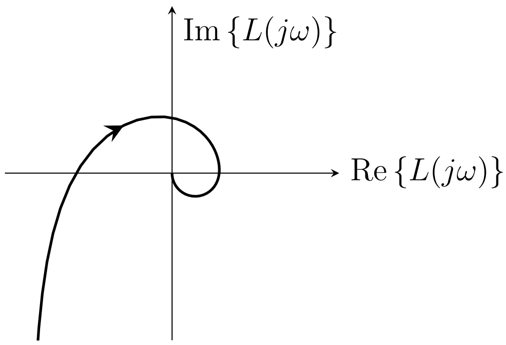
d) Als Eingangsgröße $u(t)$ wird nun der folgende zeitliche Verlauf gewählt.



Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$.

Aufgabe 2:

Die Ortskurve einer Übertragungsfunktion $L(s)$ ist wie folgt gegeben:



a) Entwerfen Sie eine Übertragungsfunktion $L(s)$, mit einem maximalen Polüberschuss von 2, welche zu der gegeben Ortskurve gehören kann.

b) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm Ihrer entworfenen Übertragungsfunktion $L(s)$ und zeigen Sie nachvollziehbar, dass $L(s)$ zur gegebenen Ortskurve gehören kann.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein nichtlineares Zustandsmodell dritter Ordnung mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_3^2 - 10 \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_3^2 - 11 + u \\
\frac{dx_3}{dt} &= 2x_1x_2 - x_2 - x_1 - 1 \\
y = h(x,u) &= x_1x_3 + u
\end{aligned}$$

a) Ermitteln Sie für $u = u_R = 2$ alle Ruhelagen x_R und Ausgangsgrößen $y_R = h(x_R, u_R)$ des gegebenen nichtlinearen Zustandsmodells.

b) Ermitteln Sie für eine dieser Ruhelagen das linearisierte Zustandsmodell

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u, \\
\Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u,
\end{aligned}$$

wobei

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R, \quad \Delta u = u - u_R \quad \text{und} \quad \Delta y = y - y_R$$

gilt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Reglerübertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{(s+2)}{s(s+3)}.$$

a) Ermitteln Sie, für eine Abtastzeit $T_d = 2s$, mit der Methode der *Tustin Approximation* eine zeitdiskrete Übertragungsfunktion $R_d(z)$ der Reglerübertragungsfunktion.

b) Berechnen Sie die Folgenelemente u_0, u_1 und u_2 für $(e_k) = (4, -10, 12\ldots)$.

c) In welchen Bereich der z-Ebene wird die linke offene s-Ebene bei Anwendung der Tustin Approximation abgebildet?

Aufgabe 5:

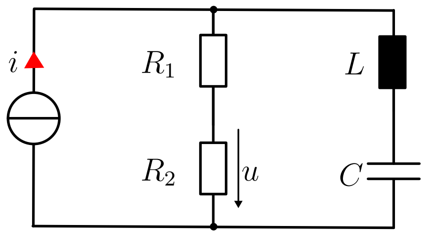
Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = \alpha s^4 + \alpha s^3 + s^2 + \beta s + 1.$$

Ermitteln Sie mit Hilfe des Routh-Schemas den größtmöglichen Wertebereich der reellen Parameter α und β, für den $p(s)$ ein Hurwitzpolynom ist und stellen Sie diesen grafisch in der $(\alpha,\, \beta)$-Ebene dar.

Aufgabe 6:

Gegeben sei folgendes ideales elektrisches Netzwerk bestehend aus einer Stromquelle, einer Kapazität C, der Induktivität L und den Widerständen R_1 und R_2. Der Strom aus der Stromquelle wird mit i symbolisiert, mit u wird der Spannungsabfall am Widerstand R_2 bezeichnet.

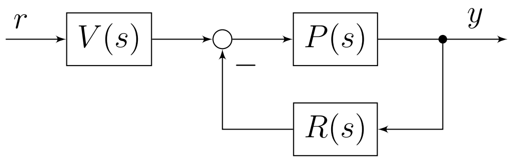


Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße i und der Ausgangsgröße $y = u$ auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}i$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + di.$$

Aufgabe 7:

Gegeben sei folgender Regelkreis mit der Führungsgröße r, der Stellgröße u und der Ausgangsgröße y:



Die Übertragungsfunktion der Regelstrecke lautet

$$P(s) = \frac{(s+1)}{s^2 - 5s + 6}.$$

a) Untersuchen Sie folgende Führungsübertragungsfunktionen $T(s)$ auf Implementierbarkeit für die gegebene Streckenübertragungsfunktion $P(s)$:

$$\text{(i)} \quad T(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)^2}$$

$$\text{(ii)} \quad T(s) = \frac{(s+1)}{s^2 + 2s}$$

$$\text{(iii)} \quad T(s) = \frac{s+2}{s^2 + s + 1}$$

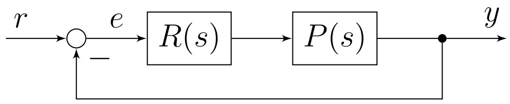
b) Wählen Sie die einzig mögliche implementierbare Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ aus Aufgabe a) aus und dimensionieren Sie die beiden Übertragungsfunktionen

$$R(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad \text{und} \quad V(s) = \frac{c(s)}{a(s)}$$

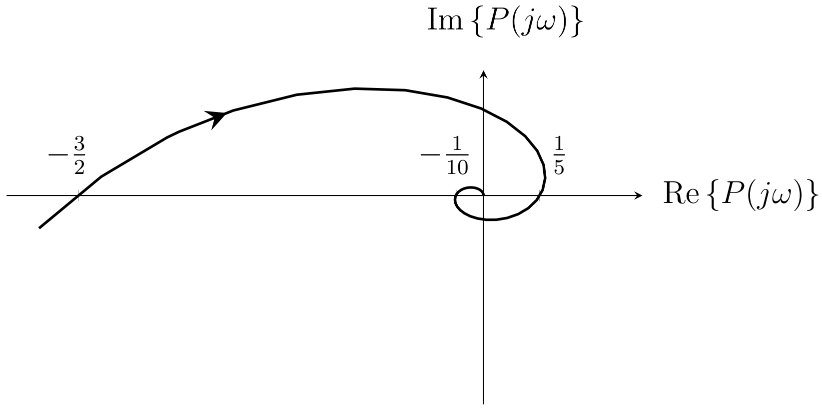
so, dass der dargestellte Regelkreis die Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ besitzt.

Aufgabe 8:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild eines Regelkreises mit der Führungsgröße r, der Regelabweichung e und der Ausgangsgröße y:



Von der Streckenübertragungsfunktion $P(s)$ ist bekannt, dass genau 3 ihrer 4 Pole einen negativen Realteil aufweisen, 1 Pol auf der imaginären Achse liegt und dass der Verstärkungsfaktor positiv ist ($V > 0$). Zudem liegt die Ortskurve des Frequenzgangs $P(j\omega)$ für $0 \leq \omega < \infty$ graphisch vor:



a) Als Regler kommt ein Proportionalregler $R(s) = K$ zum Einsatz. Ermitteln Sie mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums *nachvollziehbar* (mit Fallunterscheidung und Bestimmung der stetigen Winkeländerung für jeden Fall) den größtmöglichen Wertebereich des Parameters K, für den obiger Regelkreis die BIBO-Eigenschaft besitzt.

b) Ist die Übertragungsfunktion $L(s) = R(s)P(s)$ für einen Proportionalregler $R(s) = K$ vom einfachen Typ? Ist diese Eigenschaft notwendig um das Nyquist-Kriterium im Punkt a) anwenden zu können? *Begründen Sie Ihre Antwort.*

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 11.12.2024

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	2	2.5	2.5	2	2	2.5	2.5	3	19
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Geben Sie ein zeitkontinuierliches lineares zeitinvariantes Zustandsmodell zweiter Ordnung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y an, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Sprungfähigkeit
- asymptotische Stabilität

Woran erkennen Sie, dass die geforderten Eigenschaften erfüllt sind?

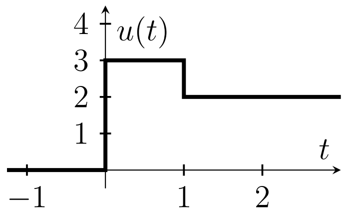
Aufgabe 2:

Gegeben sei das folgende Zustandsmodell zweiter Ordnung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für die reellen Konstanten α und β so, dass die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{u}(s)}$ *BIBO*-stabil ist.

b) Ermitteln Sie für $\alpha = -1$ und $\beta = 2$ den exakten zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ für die folgende Eingangsgröße $u(t)$:



Aufgabe 3:

Gegeben sind die folgenden Polynome:

$$\begin{aligned}p_1(s) &= 2s^4 + ks^3 - 2s^2 + k^2 s + 2 \\ p_2(s) &= s^5 + 10s^4 + ks^3 + 2s^2 + 5 \\ p_3(s) &= 2s^3 - k^2 s^2 + 2s - k \\ p_4(s) &= -s^3 + (3 + k^2)s^2 + (k^2 + 2k)s - k^2 + 3k\end{aligned}$$

Ermitteln Sie mit Hilfe des Routh-Schemas jeweils den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters k, für den die nachstehenden Polynome Hurwitzpolynome sind.

a) $p_1(s)$ *b)* $p_3(s)$

c) $p_3(s) + p_4(s)$ *d)* $p_1(s)p_2(s)$

Aufgabe 4:

Gegeben sei ein nichtlineares Zustandsmodell dritter Ordnung mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1^2 + (2 - x_3) - 12 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1^2 - 11 + u \\ \frac{dx_3}{dt} &= (6 - x_3)x_1 - x_2 \\ y = h(x, u) &= \frac{x_1^2 x_3}{6} + u \end{aligned}$$

a) Ermitteln Sie für $u = u_R = -5$ alle Ruhelagen $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_{R,1} & x_{R,2} & x_{R,3} \end{bmatrix}^T$ und Ausgangsgrößen $y_R = h(x_R, u_R)$ des gegebenen nichtlinearen Zustandsmodells.

b) Ermitteln Sie für eine dieser Ruhelagen das linearisierte Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u, \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T \Delta\mathbf{x} + d\Delta u, \end{aligned}$$

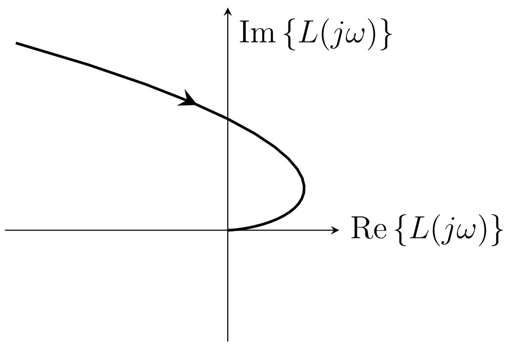
wobei

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R, \quad \Delta u = u - u_R \quad \text{und} \quad \Delta y = y - y_R$$

gilt.

Aufgabe 5:

Die Ortskurve einer Übertragungsfunktion $L(s)$ ist wie folgt gegeben:



a) Entwerfen Sie eine Übertragungsfunktion $L(s)$, mit einem maximalen Polüberschuss von 2, welche zu der gegeben Ortskurve gehören kann.

b) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm Ihrer entworfenen Übertragungsfunktion $L(s)$ und zeigen Sie nachvollziehbar, dass $L(s)$ zur gegebenen Ortskurve gehören kann.

Aufgabe 6:

Gegeben sei die Reglerübertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{(s+5)}{s(s+10)}.$$

a) Ermitteln Sie, für eine Abtastzeit $T_d = 2s$, mit der Methode der *Tustin Approximation* eine zeitdiskrete Übertragungsfunktion $R_d(z)$ der Reglerübertragungsfunktion.

b) Berechnen Sie die Folgenelemente u_0 und u_1 für $(e_k) = (\frac{11}{6}, \frac{10}{36}, \ldots)$.

c) In welchen Bereich der z-Ebene wird die linke offene s-Ebene bei Anwendung der Tustin Approximation abgebildet?

Aufgabe 7:

Von einer gebrochen rationalen Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{\overline{y}(s)}{\overline{u}(s)}$ *zweiter Ordnung* mit reellen Koeffizienten ist bekannt, dass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} &\lim_{s \to -2 \pm j} |G(s)| = \infty, \\ &\lim_{t \to \infty} y(t) = 0 \quad \text{für } u(t) = 9\sin(3t), \\ &\lim_{t \to \infty} y(t) = 1 \quad \text{für } u(t) = \sigma(t). \end{aligned}$$

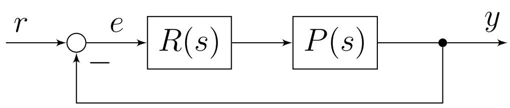
a) Ermitteln Sie $G(s)$.

b) Zeichnen Sie den PN-Plan der gesuchten Übertragungsfunktion $G(s)$.

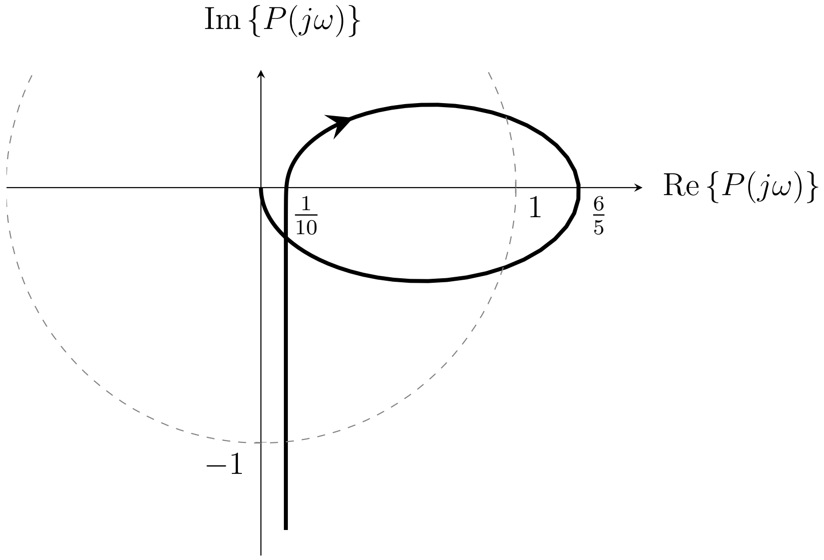
c) Ist das System sprungfähig? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

Aufgabe 8:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild eines Regelkreises mit der Führungsgröße r, der Regelabweichung e und der Ausgangsgröße y:



Von der Streckenübertragungsfunktion $P(s)$ ist bekannt, dass genau 2 ihrer 3 Pole einen negativen Realteil aufweisen, 1 Pol auf der imaginären Achse liegt und dass der Verstärkungsfaktor positiv ist ($V > 0$). Zudem liegt die Ortskurve des Frequenzgangs $P(j\omega)$ für $0 \leq \omega < \infty$ graphisch vor:



a) Als Regler kommt ein Proportionalregler $R(s) = K$ zum Einsatz. Ermitteln Sie mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums *nachvollziehbar* (mit Fallunterscheidung und Bestimmung der stetigen Winkeländerung für jeden Fall) den größtmöglichen Wertebereich des Parameters K, für den obiger Regelkreis die BIBO-Eigenschaft besitzt.

b) Für welche Werte von K ist die Übertragungsfunktion $L(s) = R(s)P(s)$ (mit $R(s) = K$) vom einfachen Typ? Ist diese Eigenschaft notwendig um das Nyquist-Kriterium im Punkt a) anwenden zu können? *Begründen Sie Ihre Antwort.*